Systèmes Linéaires en Électronique II

PSI*

Lycée Kléber
Marc Venturi

Sommaire

Définitions

Soit $f(t)$ une fonction à valeurs réelles, définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période T et continue par morceaux :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t+T) = f(t).$$

Définitions

Soit $f(t)$ une fonction à valeurs réelles, définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période T et continue par morceaux :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t+T) = f(t).$$

Remarque : il suffit d'étudier la fonction sur un intervalle de longueur T, par exemple sur l'intervalle $[0; T]$.

Définitions

Soit $f(t)$ une fonction à valeurs réelles, définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période T et continue par morceaux :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t+T) = f(t).$$

Remarque : il suffit d'étudier la fonction sur un intervalle de longueur T, par exemple sur l'intervalle $[0; T]$.

On définit :

- la valeur moyenne de f : $\langle f \rangle = \dfrac{1}{T} \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$;
- la valeur efficace de f : $f_{\text{eff}} = \sqrt{\dfrac{1}{T} \int_0^T f^2(t)\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\langle f^2 \rangle}$.

Exemples

À connaître absolument (et à savoir retrouver)

- $\langle \sin(\omega t + \varphi) \rangle = \langle \cos(\omega t + \varphi) \rangle = 0\,;$

Exemples

À connaître absolument (et à savoir retrouver)

- $\langle \sin(\omega t + \varphi) \rangle = \langle \cos(\omega t + \varphi) \rangle = 0$;
- $\langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle = \langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = \dfrac{1}{2}$.

Exemples

À connaître absolument (et à savoir retrouver)

- $\langle \sin(\omega t + \varphi) \rangle = \langle \cos(\omega t + \varphi) \rangle = 0$;
- $\langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle = \langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = \dfrac{1}{2}$.
- $\langle \cos(\omega t + \varphi) \sin(\omega t + \varphi) \rangle = 0$.

Exemples

Exercices

- Soit un signal **sinusoïdal** s de moyenne nulle et d'amplitude crête-à-crête $2E$. Montrer que $s_{\text{eff}} = \dfrac{E}{\sqrt{2}}$.

Exemples

Exercices

- Soit un signal **sinusoïdal** s de moyenne nulle et d'amplitude crête-à-crête $2E$. Montrer que $s_{\text{eff}} = \dfrac{E}{\sqrt{2}}$.
- Soit un signal **créneau** f de moyenne nulle et d'amplitude crête-à-crête $2E$. Montrer que $f_{\text{eff}} = E$.

Exemples

Exercices

- Soit un signal **sinusoïdal** s de moyenne nulle et d'amplitude crête-à-crête $2E$. Montrer que $s_{\text{eff}} = \dfrac{E}{\sqrt{2}}$.
- Soit un signal **créneau** f de moyenne nulle et d'amplitude crête-à-crête $2E$. Montrer que $f_{\text{eff}} = E$.
- Soit un signal **triangle** g de moyenne nulle et d'amplitude crête-à-crête $2E$. Montrer que $g_{\text{eff}} = \dfrac{E}{\sqrt{3}}$.

Séries de Fourier

Coefficients de Fourier

Soit $f(t)$ une fonction de période T, continue par morceaux.
On pose $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$.
On définit deux suites $(a_n, b_n), n \in \mathbb{N}$, de la façon suivante :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t.$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t.$$

Les coefficients (a_n, b_n) sont appelés **coefficients de Fourier** de la fonction f.

Séries de Fourier

Propriétés des coefficients de Fourier

- $b_0 = 0$.

Séries de Fourier

Propriétés des coefficients de Fourier

- $b_0 = 0$.
- $a_0 = 2\langle f \rangle$.

Séries de Fourier

Propriétés des coefficients de Fourier

- $b_0 = 0$.
- $a_0 = 2\langle f \rangle$.
- f paire $\Rightarrow b_n = 0 \ \forall n$.

Séries de Fourier

Propriétés des coefficients de Fourier

- $b_0 = 0$.
- $a_0 = 2\langle f \rangle$.
- f paire $\Rightarrow b_n = 0\ \forall n$.
- f impaire $\Rightarrow a_n = 0\ \forall n$.

Séries de Fourier

Autres coefficients de Fourier

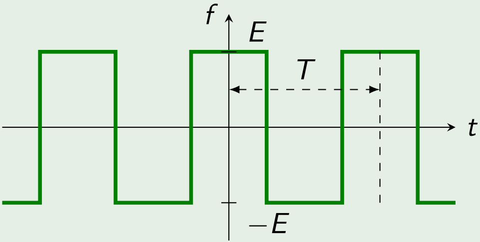
Il sera intéressant d'utiliser les coefficients suivants, issus des (a_n, b_n) :

- $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$;
- $\cos\varphi_n = \dfrac{a_n}{A_n}, \sin\varphi_n = -\dfrac{b_n}{A_n}$.

Séries de Fourier

Fonction créneau

Soit la fonction créneau de moyenne nulle, d'amplitude crête-à-crête $2E$, de période T, paire.



$$\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p} = 0, \quad a_{2p+1} = \frac{4E}{\pi} \frac{(-1)^p}{2p+1}.$$

Séries de Fourier

Sommes partielles

Soit la somme trigonométrique partielle $S_{f,N}(t)$ suivante, où $\omega_n = n\omega_1$:

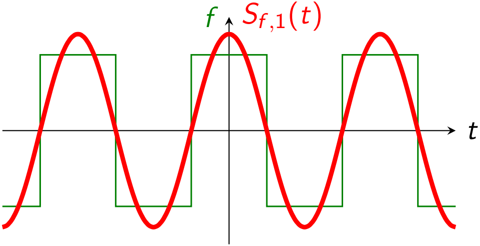
$$S_{f,N}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t),$$

qui s'écrit aussi

$$S_{f,N}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n).$$

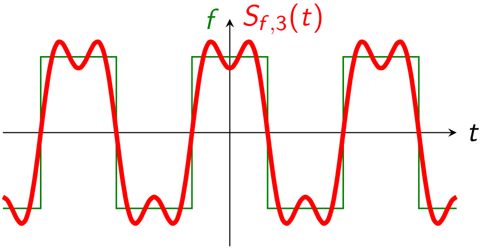
Séries de Fourier

Représentation graphique des sommes partielles dans le cas où f est la fonction créneau définie précédemment.



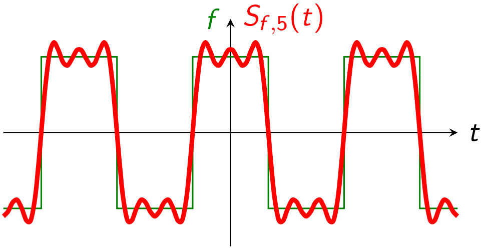
Séries de Fourier

Représentation graphique des sommes partielles dans le cas où f est la fonction créneau définie précédemment.



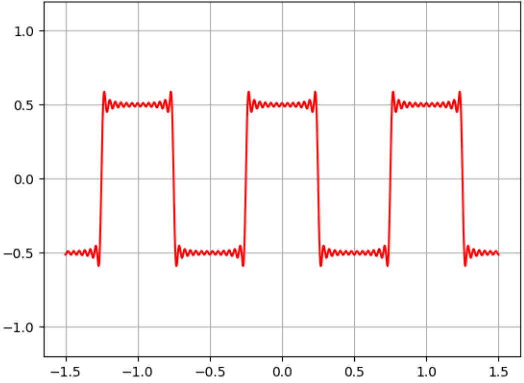
Séries de Fourier

Représentation graphique des sommes partielles dans le cas où f est la fonction créneau définie précédemment.



Séries de Fourier

$S_{f,25}(t)$:



Séries de Fourier

Propriété fondamentale, série de Fourier

On montre que :

$$\lim_{N \to +\infty} S_{f,N}(t) = f(t),$$

c'est-à-dire que l'on retrouve la fonction f initiale comme limite de la série de Fourier.
On écrit encore :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n).$$

Séries de Fourier

Propriété fondamentale, série de Fourier

Définitions :

- $\dfrac{a_0}{2} = \langle f \rangle$ est la moyenne de f, ou terme d'ordre 0.

Séries de Fourier

Propriété fondamentale, série de Fourier

Définitions :

- $\dfrac{a_0}{2} = \langle f \rangle$ est la moyenne de f, ou terme d'ordre 0.
- $A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ est le **terme fondamental**. C'est le seul terme de la série de même période que le signal f.

Séries de Fourier

Propriété fondamentale, série de Fourier

Définitions :

- $\dfrac{a_0}{2} = \langle f \rangle$ est la moyenne de f, ou terme d'ordre 0.
- $A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ est le **terme fondamental**. C'est le seul terme de la série de même période que le signal f.
- $A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$, $n \geqslant 2$ est **l'harmonique d'ordre** n. Elle est de période $\dfrac{T}{n}$.

Séries de Fourier

Propriété fondamentale, série de Fourier

On a ainsi les transformation suivantes :

$$f(t) \xrightarrow{\text{DF}} (a_n, b_n) \text{ ou } (A_n, \varphi_n)$$

$$(a_n, b_n) \text{ ou } (A_n, \varphi_n) \xrightarrow{\text{SF}} f(t)$$

DF est la **décomposition de Fourier**, SF est la **synthèse de Fourier**.

Spectre

L'ensemble des coefficients (A_n, φ_n) constitue le **spectre** du signal f.

Spectre

L'ensemble des coefficients (A_n, φ_n) constitue le **spectre** du signal f.
Remarques :

Spectre

L'ensemble des coefficients (A_n, φ_n) constitue le **spectre** du signal f.

Remarques :

- On se contente souvent de la représentation des amplitudes A_n.

Spectre

L'ensemble des coefficients (A_n, φ_n) constitue le **spectre** du signal f.

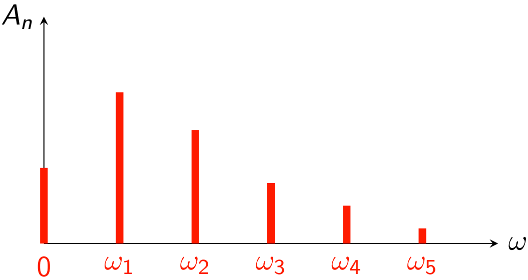
Remarques :

- On se contente souvent de la représentation des amplitudes A_n.
- Il s'agit d'un spectre *discret*, puisque les A_n ne sont pas définis pour tout ω mais pour l'ensemble dénombrable $(\omega_n = n\omega_1), n \in \mathbb{N}$.

Spectre

Le spectre se représente graphiquement :

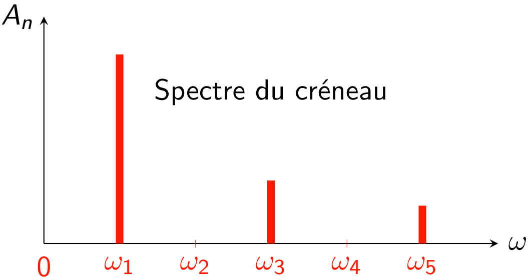
- en abscisse les pulsations $\omega_n = n\omega_1$;
- en ordonnée les amplitudes A_n.



Spectre

Le spectre se représente graphiquement :

- en abscisse les pulsations $\omega_n = n\omega_1$;
- en ordonnée les amplitudes A_n.



Sommaire

Filtrage d'un signal (rappels)

Un système électronique LCI peut constituer un **filtre** dont le rôle est **d'éliminer des fréquences ou des bandes de fréquences indésirables**.

Filtrage d'un signal (rappels)

Un système électronique LCI peut constituer un **filtre** dont le rôle est **d'éliminer des fréquences ou des bandes de fréquences indésirables**.

Quelques fonctions de transfert

$\underline{H}_{PB} = \dfrac{H_0}{1 + j\omega\tau}$, passe-bas du premier ordre.

Filtrage d'un signal (rappels)

Un système électronique LCI peut constituer un **filtre** dont le rôle est **d'éliminer des fréquences ou des bandes de fréquences indésirables**.

Quelques fonctions de transfert

$\underline{H}_{PB} = \dfrac{H_0}{1 + j\omega\tau}$, passe-bas du premier ordre.

$\underline{H}_{PH} = H_0 \dfrac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$, passe-haut du premier ordre.

Filtrage d'un signal (rappels)

Un système électronique LCI peut constituer un **filtre** dont le rôle est **d'éliminer des fréquences ou des bandes de fréquences indésirables**.

Quelques fonctions de transfert

$$\underline{H}_{PB} = \frac{H_0}{1 + j\omega\tau}, \text{ passe-bas du premier ordre.}$$

$$\underline{H}_{PH} = H_0 \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}, \text{ passe-haut du premier ordre.}$$

$$\underline{H}_{Pb} = H_0 \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}, \text{ passe-bande.}$$

Action d'un filtre LCI sur un signal périodique

- Le filtre est caractérisé par sa fonction de transfert : domaine fréquentiel.

Action d'un filtre LCI sur un signal périodique

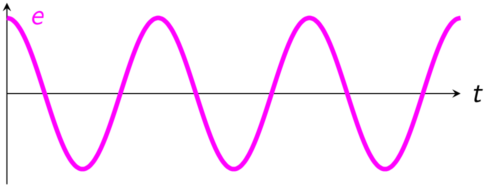
- Le filtre est caractérisé par sa fonction de transfert : domaine fréquentiel.
- Le signal, périodique, est décomposé en série de Fourier : domaine fréquentiel.

Action d'un filtre LCI sur un signal périodique

- Le filtre est caractérisé par sa fonction de transfert : domaine fréquentiel.
- Le signal, périodique, est décomposé en série de Fourier : domaine fréquentiel.
- On peut appliquer la fonction de transfert sur **chaque** composante harmonique de la série de Fourier.

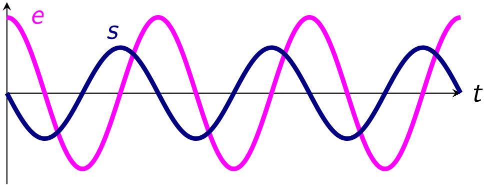
Action d'un filtre LCI sur un signal périodique

Soit un signal harmonique $e(t) = A_e \cos(\omega t + \varphi_e)$ soumis à un système de fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = H(\omega) \exp j\varphi(\omega)$ où $H(\omega) = |\underline{H}(\omega)|$.



Action d'un filtre LCI sur un signal périodique

Soit un signal harmonique $e(t) = A_e \cos(\omega t + \varphi_e)$ soumis à un système de fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = H(\omega) \exp j\varphi(\omega)$ où $H(\omega) = |\underline{H}(\omega)|$.



Alors, le signal de sortie $s(t)$ s'écrit :

$$s(t) = \underbrace{H(\omega)A_e}_{A_s} \cos(\omega t + \underbrace{\varphi_e + \varphi(\omega)}_{\varphi_s}).$$

Action d'un filtre LCI sur un signal périodique

Soit un signal périodique $e(t)$ dont on connaît la série de Fourier :

$$e(t) = \langle e \rangle + \sum_{n=1}^{+\infty} A_{e\,n} \cos(n\omega_1 t + \varphi_{e\,n}).$$

Ce signal est soumis à un système de fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$.

Action d'un filtre LCI sur un signal périodique

Soit un signal périodique $e(t)$ dont on connaît la série de Fourier :

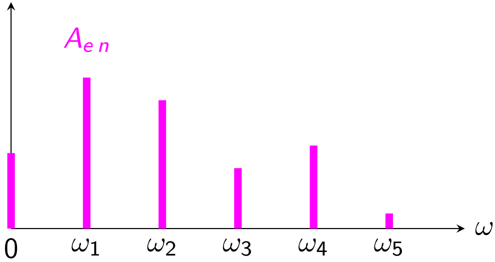
$$e(t) = \langle e \rangle + \sum_{n=1}^{+\infty} A_{e\,n} \cos(n\omega_1 t + \varphi_{e\,n}).$$

Ce signal est soumis à un système de fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$.
Alors, le signal de sortie est donné par la série :

$$s(t) = \underline{H}(0)\langle e \rangle + \sum_{n=1}^{+\infty} H(n\omega_1) A_{e\,n} \cos(n\omega_1 t + \varphi_{e\,n} + \varphi(n\omega_1)).$$

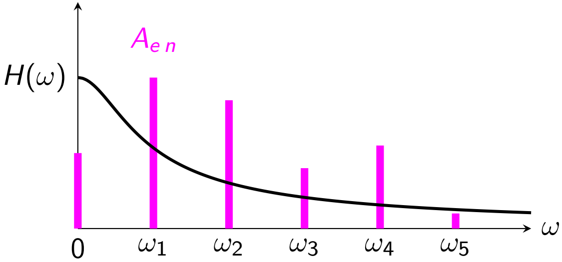
Action d'un filtre LCI sur un signal périodique

Graphiquement :



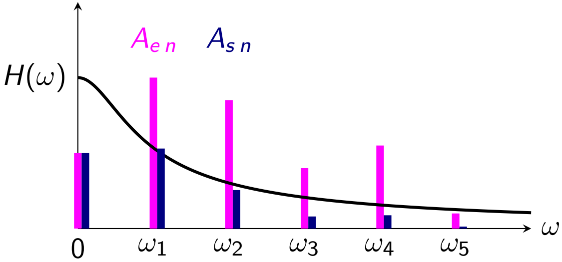
Action d'un filtre LCI sur un signal périodique

Graphiquement :



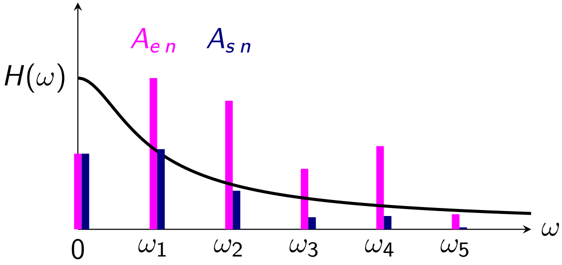
Action d'un filtre LCI sur un signal périodique

Graphiquement :



Action d'un filtre LCI sur un signal périodique

Graphiquement :

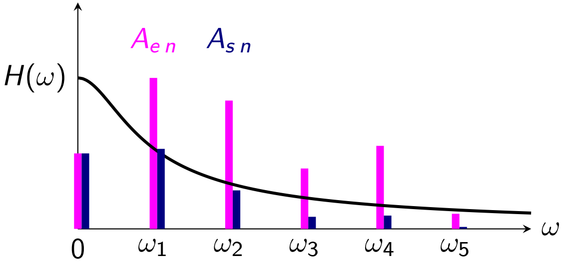


Un filtre LCI :

- permet de modifier les amplitudes des fréquences existantes ;

Action d'un filtre LCI sur un signal périodique

Graphiquement :

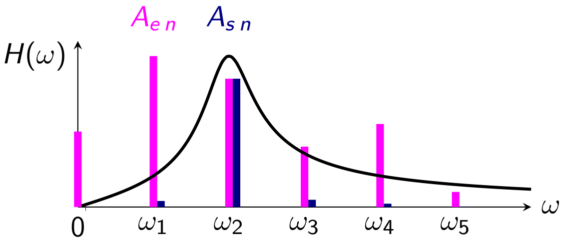


Un filtre LCI :

- permet de modifier les amplitudes des fréquences existantes ;
- **ne permet pas de faire apparaître de nouvelles fréquences !**

Action d'un filtre LCI sur un signal périodique

Filtre passe-bande :



Le signal de sortie est ici quasi sinusoïdal.

Gabarit d'un filtre

- Le gabarit d'un filtre décrit les **contraintes** imposées à un filtre.

Gabarit d'un filtre

- Le gabarit d'un filtre décrit les **contraintes** imposées à un filtre.
- Ces contraintes ont pour origine la fonction attendue du filtre.

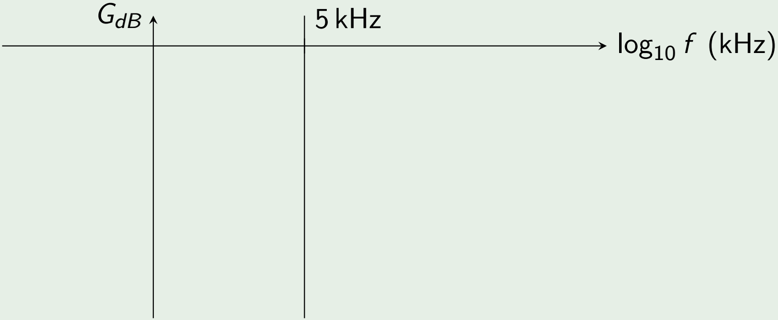
Gabarit d'un filtre

- Le gabarit d'un filtre décrit les **contraintes** imposées à un filtre.
- Ces contraintes ont pour origine la fonction attendue du filtre.
- Le gabarit décrit **quantitativement** les attentes du filtre.

Gabarit d'un filtre

Filtre passe-bas

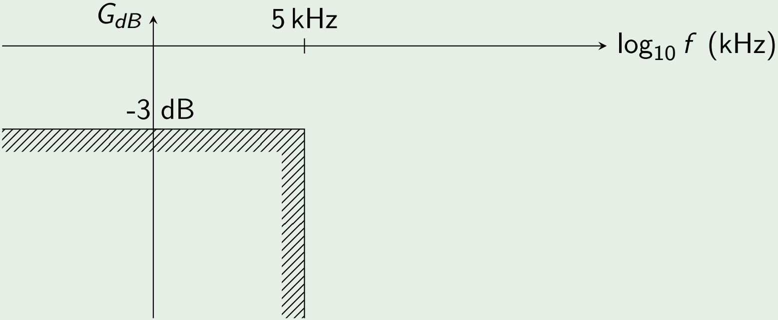
- le filtre laisse passer les fréquences $f < f_0 = 5\,\text{kHz}$;



Gabarit d'un filtre

Filtre passe-bas

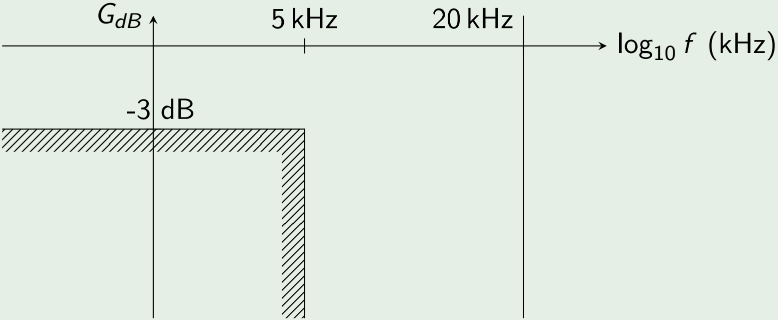
- le filtre laisse passer les fréquences $f < f_0 = 5\,\mathrm{kHz}$;
- Dans la bande passante : $G_{dB}(f) > G_{dB\,\mathrm{min}} = -3\,\mathrm{dB}$;



Gabarit d'un filtre

Filtre passe-bas

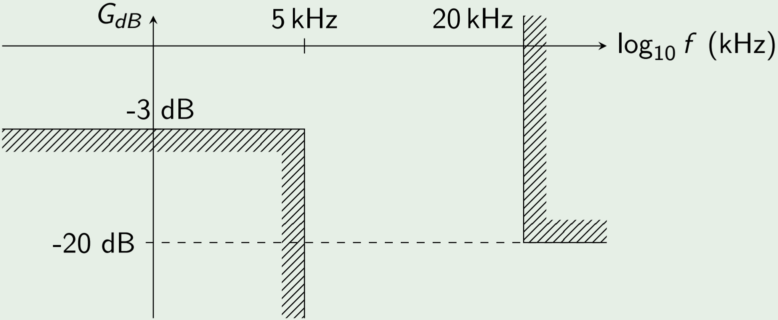
- le filtre laisse passer les fréquences $f < f_0 = 5\,\mathrm{kHz}$;
- Dans la bande passante : $G_{dB}(f) > G_{dB\,\mathrm{min}} = -3\,\mathrm{dB}$;
- le filtre atténue les fréquences $f > f_1 = 20\,\mathrm{kHz}$;



Gabarit d'un filtre

Filtre passe-bas

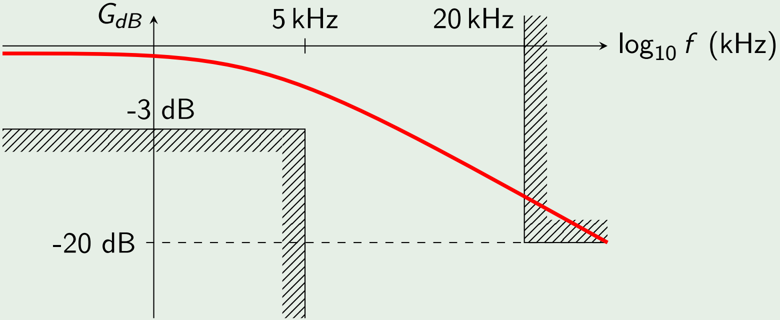
- le filtre laisse passer les fréquences $f < f_0 = 5\,\text{kHz}$;
- Dans la bande passante : $G_{dB}(f) > G_{dB\,\text{min}} = -3\,\text{dB}$;
- le filtre atténue les fréquences $f > f_1 = 20\,\text{kHz}$;
- Dans la bande atténuée, $G_{dB}(f) < G_{dB\,\text{max}} = -10\,\text{dB}$.



Gabarit d'un filtre

Filtre passe-bas

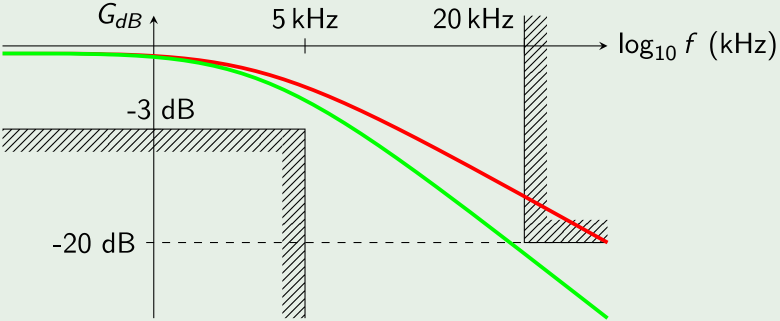
- le filtre laisse passer les fréquences $f < f_0 = 5\,\mathrm{kHz}$;
- Dans la bande passante : $G_{dB}(f) > G_{dB\,\min} = -3\,\mathrm{dB}$;
- le filtre atténue les fréquences $f > f_1 = 20\,\mathrm{kHz}$;
- Dans la bande atténuée, $G_{dB}(f) < G_{dB\,\max} = -10\,\mathrm{dB}$.



Gabarit d'un filtre

Filtre passe-bas

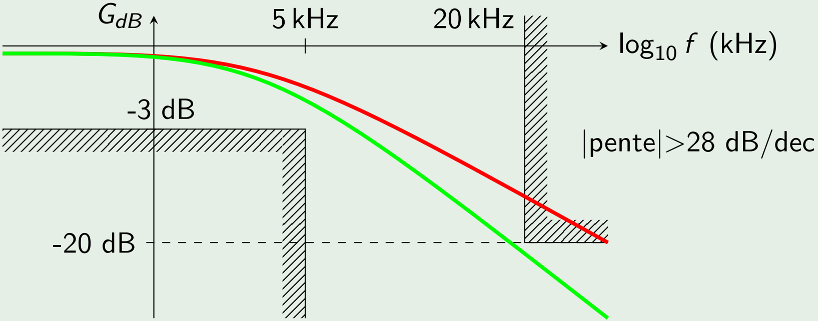
- le filtre laisse passer les fréquences $f < f_0 = 5\,\text{kHz}$;
- Dans la bande passante : $G_{dB}(f) > G_{dB\,\min} = -3\,\text{dB}$;
- le filtre atténue les fréquences $f > f_1 = 20\,\text{kHz}$;
- Dans la bande atténuée, $G_{dB}(f) < G_{dB\,\max} = -10\,\text{dB}$.



Gabarit d'un filtre

Filtre passe-bas

- le filtre laisse passer les fréquences $f < f_0 = 5\,\text{kHz}$;
- Dans la bande passante : $G_{dB}(f) > G_{dB\,\min} = -3\,\text{dB}$;
- le filtre atténue les fréquences $f > f_1 = 20\,\text{kHz}$;
- Dans la bande atténuée, $G_{dB}(f) < G_{dB\,\max} = -10\,\text{dB}$.



Sommaire

Définition

Stabilité d'un filtre

Un système LCI est dit **stable** si sa réponse à un signal **constant** $e(t) = E$ est un signal $s(t)$ **qui tend vers une constante.**

$$e(t) = E \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} s(t) = S \text{ cte.}$$

Sinon, le filtre est dit **instable**.

Définition

Stabilité d'un filtre

Si $E = 0$, $S = 0$ (linéarité du système). On peut donc aussi énoncer la propriété de stabilité par :

La solution libre d'un système stable tend vers 0.

Propriétés de l'équation différentielle

Le système est supposé décrit par l'équation différentielle :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\mathrm{d}^i s}{\mathrm{d}t^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{\mathrm{d}^j e}{\mathrm{d}t^j}.$$

Propriétés de l'équation différentielle

Le système est supposé décrit par l'équation différentielle :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\mathrm{d}^i s}{\mathrm{d}t^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{\mathrm{d}^j e}{\mathrm{d}t^j}.$$

Comme le signal d'entrée est constant, $e = E$, il vient :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\mathrm{d}^i s}{\mathrm{d}t^i} = b_0 E.$$

Propriétés de l'équation différentielle

Les solutions de l'équation précédentes s'écrivent, pour $a_0 \neq 0$:

$$s(t) = \underbrace{\frac{b_0}{a_0} E}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{R} P_{m_k}(t) \exp(r_k t)}_{\text{solution libre}},$$

où

- r_k est une des R racines du polynôme caractéristique $\sum_{i=0}^{n} a_i r^i$,

Propriétés de l'équation différentielle

Les solutions de l'équation précédentes s'écrivent, pour $a_0 \neq 0$:

$$s(t) = \underbrace{\frac{b_0}{a_0} E}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{R} P_{m_k}(t) \exp(r_k t)}_{\text{solution libre}},$$

où

- r_k est une des R racines du polynôme caractéristique $\sum_{i=0}^{n} a_i r^i$,
- m_k la multiplicité de la racine r_k,

Propriétés de l'équation différentielle

Les solutions de l'équation précédentes s'écrivent, pour $a_0 \neq 0$:

$$s(t) = \underbrace{\frac{b_0}{a_0}E}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{R} P_{m_k}(t)\exp(r_k t)}_{\text{solution libre}},$$

où

- r_k est une des R racines du polynôme caractéristique $\sum_{i=0}^{n} a_i r^i$,
- m_k la multiplicité de la racine r_k,
- P_{m_k} un polynôme de degré $m_k - 1$.

Propriétés de l'équation différentielle

Si une racine est complexe de partie réelle λ_k et de partie imaginaire μ_k, $r_k = \lambda_k + j\mu_k$, alors son complexe conjugué est aussi une racine, de même multiplicité m_k, car le polynôme caractéristique est réel. Dans ce cas, le terme relatif à cette racine dans le signal $s(t)$ est :

$$\left[P_{m_k}(t)\cos(\mu_k t) + P'_{m_k}(t)\sin(\mu_k t))\right]\exp\left(\lambda_k t\right)$$

Propriétés de l'équation différentielle

À retenir

- Un système LCI est **stable** si et seulement si **toutes** les racines du polynôme caractéristique $\sum_{i=0}^{n} a_i r^i$ ont une **partie réelle strictement négative**.

Propriétés de l'équation différentielle

À retenir

- Un système LCI est **stable** si et seulement si **toutes** les racines du polynôme caractéristique $\sum_{i=0}^{n} a_i r^i$ ont une **partie réelle strictement négative**.
- Du point de vue de la fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{\sum_{k=0}^{m} b_k (j\omega)^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i (j\omega)^i}$, la condition de stabilité s'énonce avec ses **pôles** :
  Tous les pôles de la fonction de transfert ont une partie réelle strictement négative.

Propriétés de l'équation différentielle

Exemple

Soit le système décrit par l'équation :

$$\tau^3 \frac{\mathrm{d}^3 s}{\mathrm{d}t^3} - 3\tau \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + 2s = e.$$

Le polynôme caractéristique est :

$$P(x) = x^3\tau^3 - 3x\tau + 2 = (x\tau - 1)^2(x\tau + 2),$$

Les racines sont :

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{1}{\tau}, \text{ racine double }, m_1 = 2 \\ r_2 = -\dfrac{2}{\tau}, \text{ racine simple }, m_2 = 1. \end{cases}$$

Propriétés de l'équation différentielle

Exemple

Les solutions s'écrivent alors :

$$s(t) = \frac{1}{2}E + (\alpha_1 t + \beta_1)\exp\left(\frac{t}{\tau}\right) + \alpha_2 \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right),$$

$(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2)$ sont des constantes d'intégration.

Propriétés de l'équation différentielle

Exemple

Les solutions s'écrivent alors :

$$s(t) = \frac{1}{2}E + (\alpha_1 t + \beta_1)\exp\left(\frac{t}{\tau}\right) + \alpha_2 \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right),$$

$(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2)$ sont des constantes d'intégration.
Le système est donc **instable**.

Condition de stabilité

Filtre du premier ordre

La fonction de transfert est de la forme ($a_1 \neq 0$) :

$$\underline{H} = \frac{b_0}{a_1 j\omega + a_0}.$$

Condition de stabilité

Filtre du premier ordre

La fonction de transfert est de la forme ($a_1 \neq 0$) :

$$\underline{H} = \frac{b_0}{a_1 j\omega + a_0}.$$

Le pôle de $\underline{H}$ est $-\dfrac{a_0}{a_1} \in \mathbb{R}$.

Condition de stabilité

Filtre du premier ordre

La fonction de transfert est de la forme ($a_1 \neq 0$) :

$$\underline{H} = \frac{b_0}{a_1 j\omega + a_0}.$$

Le pôle de $\underline{H}$ est $-\dfrac{a_0}{a_1} \in \mathbb{R}$.

La condition de stabilité est donc $-\dfrac{a_0}{a_1} < 0$ ou encore :

Condition de stabilité

Filtre du premier ordre

La fonction de transfert est de la forme ($a_1 \neq 0$) :

$$\underline{H} = \frac{b_0}{a_1 j\omega + a_0}.$$

Le pôle de $\underline{H}$ est $-\dfrac{a_0}{a_1} \in \mathbb{R}$.

La condition de stabilité est donc $-\dfrac{a_0}{a_1} < 0$ ou encore :

$$\boxed{a_0 \text{ et } a_1 \text{ sont de même signe.}}$$

Condition de stabilité

Filtre du deuxième ordre

La fonction de transfert est de la forme ($a_2 \neq 0$) :

$$\underline{H} = \frac{b_1 j\omega + b_0}{a_2 (j\omega)^2 + a_1 j\omega + a_0}.$$

Condition de stabilité

Filtre du deuxième ordre

La fonction de transfert est de la forme ($a_2 \neq 0$) :

$$\underline{H} = \frac{b_1 j\omega + b_0}{a_2 (j\omega)^2 + a_1 j\omega + a_0}.$$

Les pôles de $\underline{H}$ sont les racines r_1 et r_2, réelles ou complexes et éventuellement confondues, du polynôme $a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

Condition de stabilité

Filtre du deuxième ordre

La fonction de transfert est de la forme ($a_2 \neq 0$) :

$$\underline{H} = \frac{b_1 j\omega + b_0}{a_2 (j\omega)^2 + a_1 j\omega + a_0}.$$

Les pôles de $\underline{H}$ sont les racines r_1 et r_2, réelles ou complexes et éventuellement confondues, du polynôme $a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.
On sait que :

$$r_1 + r_2 = -\frac{a_1}{a_2} \qquad \text{et} \qquad r_1 r_2 = \frac{a_0}{a_2}.$$

Condition de stabilité

Filtre du deuxième ordre

La fonction de transfert est de la forme ($a_2 \neq 0$) :

$$\underline{H} = \frac{b_1 j\omega + b_0}{a_2 (j\omega)^2 + a_1 j\omega + a_0}.$$

Les pôles de $\underline{H}$ sont les racines r_1 et r_2, réelles ou complexes et éventuellement confondues, du polynôme $a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.
On sait que :

$$r_1 + r_2 = -\frac{a_1}{a_2} \qquad \text{et} \qquad r_1 r_2 = \frac{a_0}{a_2}.$$

Si les racines sont réelles, la condition de stabilité s'écrit $r_1 < 0$ et $r_2 < 0$ d'où $r_1 + r_2 < 0$ et $r_1 r_2 > 0$ donc a_2, a_1, a_0 doivent être de même signe.

Condition de stabilité

Filtre du deuxième ordre

La fonction de transfert est de la forme ($a_2 \neq 0$) :

$$\underline{H} = \frac{b_1 j\omega + b_0}{a_2 (j\omega)^2 + a_1 j\omega + a_0}.$$

Les pôles de $\underline{H}$ sont les racines r_1 et r_2, réelles ou complexes et éventuellement confondues, du polynôme $a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.
On sait que :

$$r_1 + r_2 = -\frac{a_1}{a_2} \qquad \text{et} \qquad r_1 r_2 = \frac{a_0}{a_2}.$$

Si les racines sont complexes, elles sont conjuguées et $r_1 + r_2 = 2\Re(r_1) = 2\Re(r_2) < 0$. De plus, $r_1 r_2 = |r_1|^2 > 0$. On obtient le même résultat, c'est-à-dire a_2, a_1, a_0 de même signe.

Condition de stabilité

Filtre du deuxième ordre

La fonction de transfert est de la forme ($a_2 \neq 0$) :

$$\underline{H} = \frac{b_1 j\omega + b_0}{a_2 (j\omega)^2 + a_1 j\omega + a_0}.$$

Les pôles de $\underline{H}$ sont les racines r_1 et r_2, réelles ou complexes et éventuellement confondues, du polynôme $a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.
On sait que :

$$r_1 + r_2 = -\frac{a_1}{a_2} \qquad \text{et} \qquad r_1 r_2 = \frac{a_0}{a_2}.$$

On en conclut que pour qu'un filtre du deuxième ordre soit stable, il faut que :

$$\boxed{a_0,\ a_1 \text{ et } a_2 \text{ soient de même signe.}}$$