Systèmes Linéaires en Électronique I

PSI*

Lycée Kléber
Marc Venturi

Sommaire

Systèmes en électronique

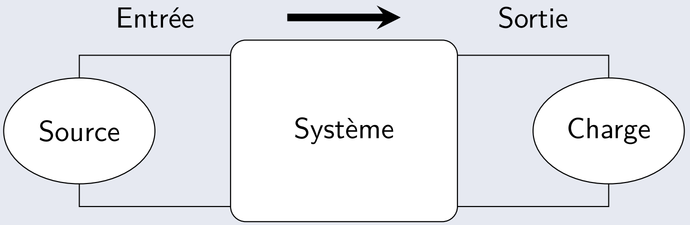
Un système électronique est une association de composants électroniques, présentant des bornes (ou pôles) d'entrée et des bornes de sortie.

Systèmes en électronique

Un système électronique est une association de composants électroniques, présentant des bornes (ou pôles) d'entrée et des bornes de sortie.
Un système électronique reçoit un signal (d'entrée) d'une source et fournit un signal (de sortie) à une charge.

Systèmes en électronique

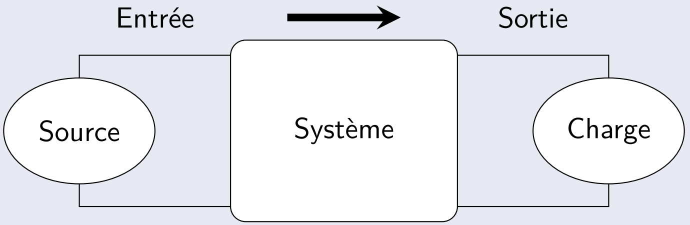
Schéma



Le système est, en général, **unidirectionnel**. Il ne peut être utilisé en plaçant le signal d'entrée en sortie.

Systèmes en électronique

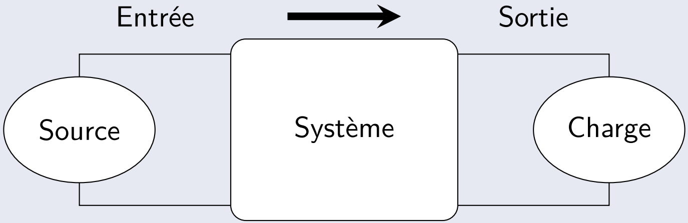
Schéma



La source et la charge sont souvent d'autres systèmes électroniques.

Systèmes en électronique

Schéma

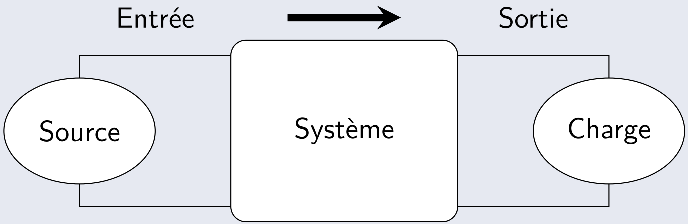


Son rôle est :

- de transformer le signal d'entrée (filtre, amplificateur,...) ;
- d'adapter la charge à la source (adaptateur d'impédance, suiveur).

Systèmes en électronique

Schéma

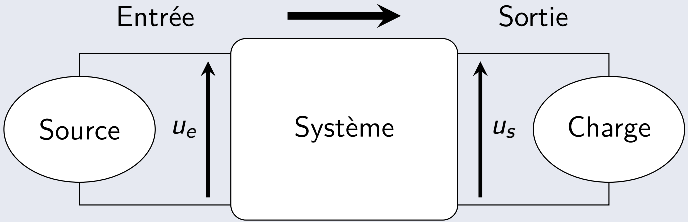


La nature physique des signaux électroniques est :

- une tension, en volt (V) ;
- une intensité, en ampère (A).

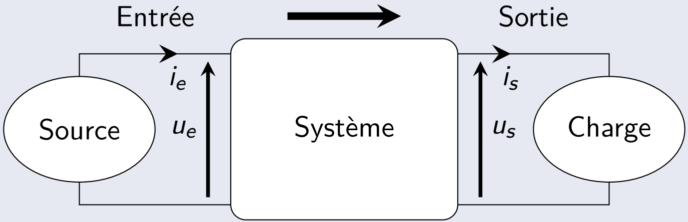
Systèmes en électronique

Schéma

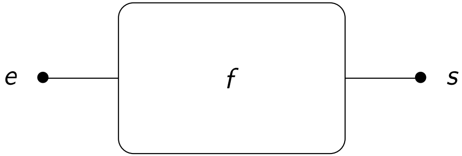


Systèmes en électronique

Schéma

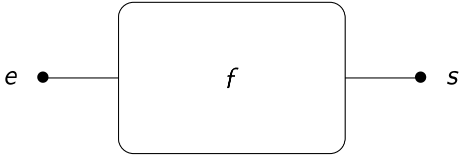


Les systèmes Linéaires Continus Invariants (LCI)



Parmi les systèmes électroniques, on distingue ceux qui sont qualifiés :

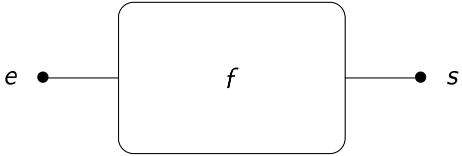
Les systèmes Linéaires Continus Invariants (LCI)



Parmi les systèmes électroniques, on distingue ceux qui sont qualifiés :

- de linéaires :
  $s_1 = f(e_1)$ et $s_2 = f(e_2) \Rightarrow f(\alpha e_1 + \beta e_2) = \alpha s_1 + \beta s_2$.

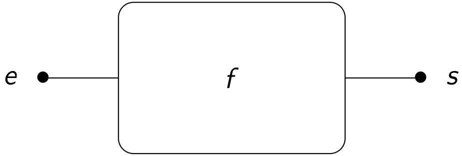
Les systèmes Linéaires Continus Invariants (LCI)



Parmi les systèmes électroniques, on distingue ceux qui sont qualifiés :

- de linéaires :
  $s_1 = f(e_1)$ et $s_2 = f(e_2) \Rightarrow f(\alpha e_1 + \beta e_2) = \alpha s_1 + \beta s_2$.
- de continus : $e(t)$ et $s(t)$ sont des fonctions continues de t (éventuellement par morceaux) $\neq$ numériques.

Les systèmes Linéaires Continus Invariants (LCI)



Parmi les systèmes électroniques, on distingue ceux qui sont qualifiés :

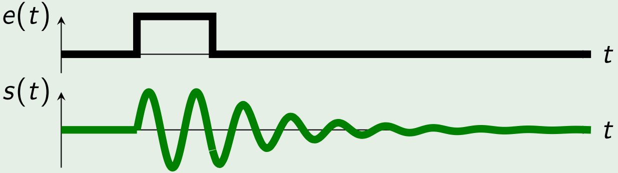
- de linéaires :
  $s_1 = f(e_1)$ et $s_2 = f(e_2) \Rightarrow f(\alpha e_1 + \beta e_2) = \alpha s_1 + \beta s_2$.
- de continus : $e(t)$ et $s(t)$ sont des fonctions continues de t (éventuellement par morceaux) $\neq$ numériques.
- d'invariants : ▸ Rappel
  $s(t) = f(e(t)) \Rightarrow f(e(t-\tau)) = s(t-\tau), \forall \tau$.

L'invariance

Exemple

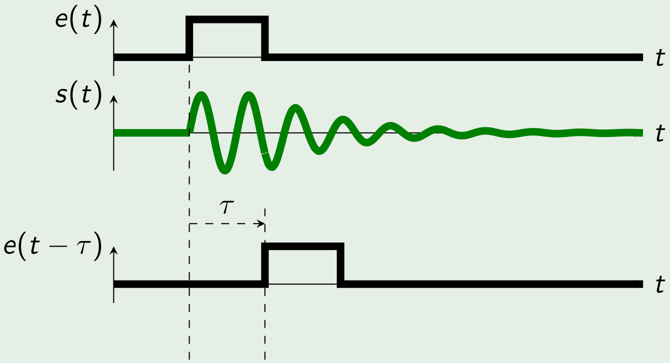
L'invariance

Exemple



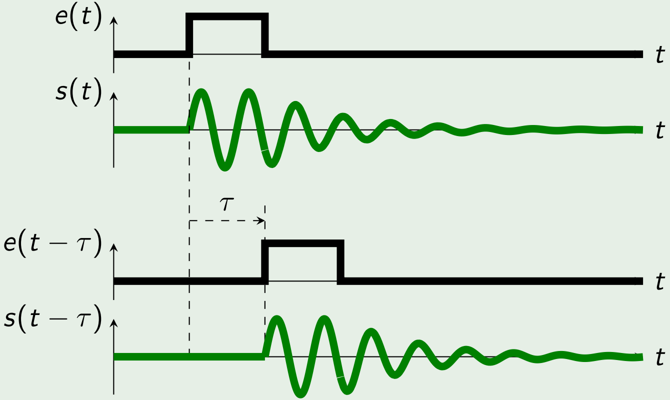
L'invariance

Exemple



L'invariance

Exemple



L'équation différentielle

Les systèmes LCI sont décrits mathématiquement par une application différentielle.

L'équation différentielle

Les signaux $e(t)$ et $s(t)$ sont liés par une équation différentielle **à coefficients réels constants**, telle que pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ et sur un intervalle de temps $[t_0, t_1]$:

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n s}{\mathrm{d}t^n} + \ldots + a_1 \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + a_0 s = b_m \frac{\mathrm{d}^m e}{\mathrm{d}t^m} + \ldots + b_1 \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + b_0 e.$$

L'équation différentielle

Les signaux $e(t)$ et $s(t)$ sont liés par une équation différentielle **à coefficients réels constants**, telle que pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ et sur un intervalle de temps $[t_0, t_1]$:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\mathrm{d}^i s}{\mathrm{d}t^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{\mathrm{d}^j e}{\mathrm{d}t^j}.$$

On vérifie les conditions LCI.

Régimes de fonctionnement

Le régime libre

Il s'agit du cas où le signal d'entrée est identiquement nul, $e(t) = 0$.
Toutes les dérivées du signal d'entrée sont alors elles aussi identiquement nulles.
L'équation différentielle se réduit alors à *l'équation homogène* :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\mathrm{d}^i s}{\mathrm{d}t^i} = 0 \Rightarrow s(t) = s_{\mathrm{libre}}(t).$$

C'est la solution de l'équation homogène.

Régimes de fonctionnement

Question

Mathématiquement, $s_{\mathrm{libre}}(t)$ dépend de n constantes arbitraires (non imposées par l'équation différentielle) qui sont définies par les n conditions initiales

$$s_{\mathrm{libre}}(0), \frac{\mathrm{d}s_{\mathrm{libre}}}{\mathrm{d}t}(0), \ldots, \frac{\mathrm{d}^{(n-1)}s_{\mathrm{libre}}}{\mathrm{d}t^{(n-1)}}(0).$$

Physiquement, qu'est-ce qui impose la solution $s_{\mathrm{libre}}(t)$?

Régimes de fonctionnement

Le régime permanent

Il s'agit de la solution particulière (unique) $s_p(t)$ de l'équation complète (avec second membre).

Régimes de fonctionnement

Le régime permanent

Il s'agit de la solution particulière (unique) $s_p(t)$ de l'équation complète (avec second membre).

Rappels

Pour une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$e(t) = 0 \Rightarrow s_p(t) = 0$$
$$e(t) = \text{Polynôme}(t) \Rightarrow s_p(t) = \text{Polynôme}(t).$$
$$e(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow s_p(t) = B\sin(\omega t + \varphi').$$

Régimes de fonctionnement

Le régime permanent

Il s'agit de la solution particulière (unique) $s_p(t)$ de l'équation complète (avec second membre).

Rappels

Pour une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$e(t) = 0 \Rightarrow s_p(t) = 0$$
$$e(t) = \text{Polynôme}(t) \Rightarrow s_p(t) = \text{Polynôme}(t).$$
$$e(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow s_p(t) = B\sin(\omega t + \varphi').$$

Un système linéaire ne modifie pas la fréquence d'un signal !

Régimes de fonctionnement

La solution générale

La solution générale est la somme d'une solution libre et de la solution particulière.

$$s(t) = s_{\mathrm{libre}}(t) + s_p(t).$$

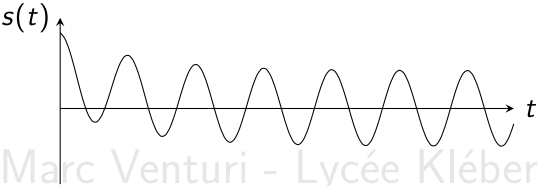
Régimes de fonctionnement

La solution générale

La solution générale est la somme d'une solution libre et de la solution particulière.

$$s(t) = s_{\text{libre}}(t) + s_p(t).$$

Si la solution libre $s_{\text{libre}}(t)$ devient négligeable devant la solution particulière $s_p(t)$ au bout d'un temps fini, on peut distinguer un **régime transitoire**.



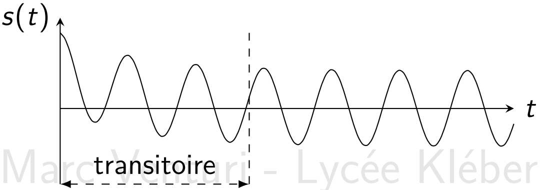
Régimes de fonctionnement

La solution générale

La solution générale est la somme d'une solution libre et de la solution particulière.

$$s(t) = s_{\mathrm{libre}}(t) + s_p(t).$$

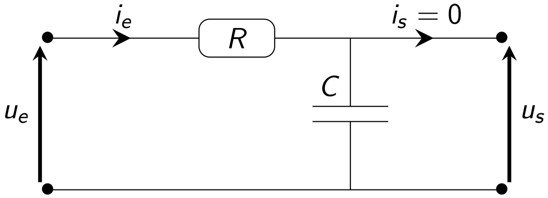
Si la solution libre $s_{\mathrm{libre}}(t)$ devient négligeable devant la solution particulière $s_p(t)$ au bout d'un temps fini, on peut distinguer un **régime transitoire**.



Le filtre RC

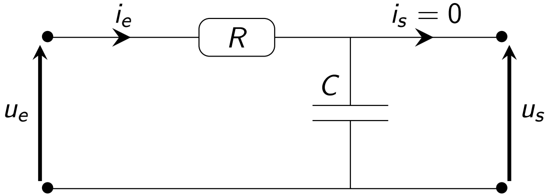
Soit le circuit suivant, soumis à un échelon de tension :

$$\forall t < 0 \begin{cases} u_e = 0 \\ u_s = 0 \end{cases}, \forall t \geqslant 0 \begin{cases} u_e = E > 0 \\ u_s = ? \end{cases}$$



Attention : il existe à l'entrée un système (générateur) non représenté qui impose la tension u_e ! Il y a *a priori* une intensité d'entrée i_e non nulle.

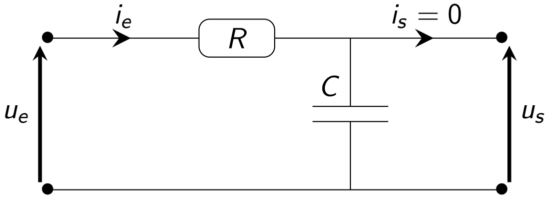
Le filtre RC



Équation différentielle (à savoir établir) où $\tau = RC$:

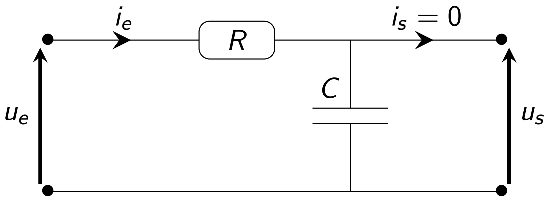
$$\tau \frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} + u_s = u_e.$$

Le filtre RC



Solutions libres : $u_{s\,\mathrm{libre}}(t) = A \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$.

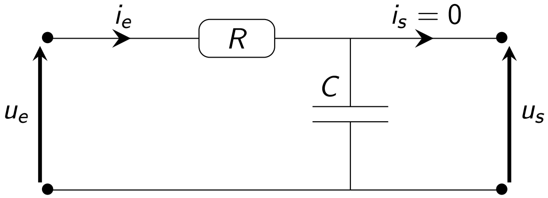
Le filtre RC



Solutions libres : $u_{s\,\mathrm{libre}}(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$.

Solution particulière : $u_{s\,p}(t) = E$.

Le filtre RC

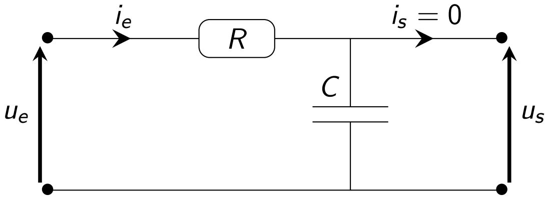


Solutions libres : $u_{s\,\mathrm{libre}}(t) = A \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$.

Solution particulière : $u_{s\,p}(t) = E$.

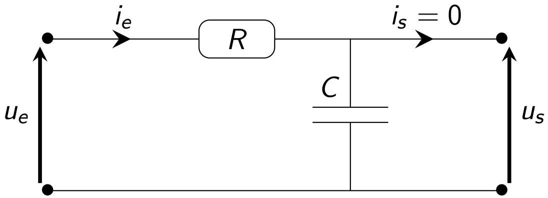
Solution complète : $u_s(t) = E + A \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$.

Le filtre RC



Attention : la condition initiale doit être utilisée sur la solution **complète**.

Le filtre RC

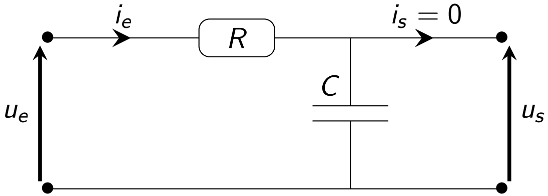


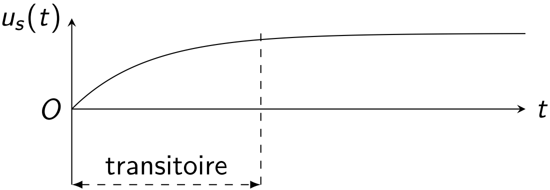
Attention : la condition initiale doit être utilisée sur la solution **complète**.

La continuité de la tension aux bornes d'un condensateur est continue d'où la condition $u_s(0^+) = u_s(0^-) = 0$. On en déduit :

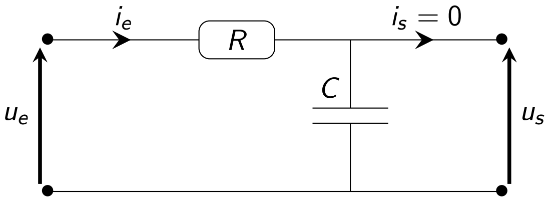
$$u_s(t) = E\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right].$$

Le filtre RC





Le filtre RC



Reprendre l'exercice avec $u_e(t) = E\sin(\omega t)$ pour $t > 0$. Solution

Questions

Qualifier les systèmes dont la relation entrée-sortie est donnée ci-dessous :

1. $\tau \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \sin(\Omega t)\, s = e\,;$
2. $\tau \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + a\, s^2 = e + \tau' \dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}.$

Solutions

Questions

Donner les solutions libres de ces équations.

1. $\tau \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \sin(\Omega t)\, s = e\,;$
2. $\tau \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + a\, s^2 = e + \tau' \dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}.$

Solutions

Sommaire

Le signal sinusoïdal (rappels)

Un signal sinusoïdal (ou harmonique) $f(t)$ est caractérisé par trois paramètres :

$$f(t) = A\cos(2\pi\nu t + \varphi)$$

Le signal sinusoïdal (rappels)

Un signal sinusoïdal (ou harmonique) $f(t)$ est caractérisé par trois paramètres :

$$f(t) = A\cos(2\pi\nu t + \varphi)$$

- une fréquence ν (ou une pulsation $\omega = 2\pi\nu$) ;

Le signal sinusoïdal (rappels)

Un signal sinusoïdal (ou harmonique) $f(t)$ est caractérisé par trois paramètres :

$$f(t) = A\cos(2\pi\nu t + \varphi)$$

- une fréquence ν (ou une pulsation $\omega = 2\pi\nu$) ;
- une phase à l'origine φ ;

Le signal sinusoïdal (rappels)

Un signal sinusoïdal (ou harmonique) $f(t)$ est caractérisé par trois paramètres :

$$f(t) = A\cos(2\pi\nu t + \varphi)$$

- une fréquence ν (ou une pulsation $\omega = 2\pi\nu$) ;
- une phase à l'origine φ ;
- une amplitude A.

Le signal sinusoïdal (rappels)

Un signal sinusoïdal (ou harmonique) $f(t)$ est caractérisé par trois paramètres :

$$f(t) = A\cos(2\pi\nu t + \varphi)$$

- une fréquence ν (ou une pulsation $\omega = 2\pi\nu$) ;
- une phase à l'origine φ ;
- une amplitude A.

La fréquence est le paramètre physique. Elle est directement accessible (et mesurable avec un multimètre) par la période $T = 1/\nu$. *La pulsation est le paramètre mathématique fondamental.*

Le signal sinusoïdal (rappels)

Question

Le signal $g(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ peut-il être décrit avec l'expression de f ?

Le signal sinusoïdal (rappels)

Question

Le signal $g(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ peut-il être décrit avec l'expression de f ?

Oui, car on peut écrire $g(t) = A\cos\left(\omega t + \varphi - \dfrac{\pi}{2}\right)$. La phase à l'origine est $\varphi - \dfrac{\pi}{2}$.

Notation complexe

À ce signal f est associée une forme complexe $\underline{f}$ telle que le signal soit la partie réelle de la forme complexe ($j^2 = -1$) :

$$\underline{f}(t) = A \exp j(\omega t + \varphi).$$

Notation complexe

À ce signal f est associée une forme complexe $\underline{f}$ telle que le signal soit la partie réelle de la forme complexe ($j^2 = -1$) :

$$\underline{f}(t) = A \exp j(\omega t + \varphi).$$

Intérêt : la dérivation et l'intégration se réduisent à une multiplication algébrique :

$$\frac{\mathrm{d}\underline{f}}{\mathrm{d}t} = j\omega \underline{f}$$
$$\int \underline{f}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{j\omega}\underline{f}.$$

Fonction de transfert (rappels)

Il est équivalent de décrire le système LCI par la relation différentielle (régime temporel) ou sa **fonction de transfert** $\underline{H}(\omega)$ (régime fréquentiel (ou harmonique)).
La fonction de transfert est le rapport des signaux **complexes** :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}.$$

Fonction de transfert (rappels)

Étant un nombre complexe, elle peut s'écrire comme le produit de son module (gain linéaire) et d'un facteur de phase, nombre complexe de module 1 :

$$\underline{H} = |\underline{H}(\omega)| \exp j\varphi(\omega).$$

Graphiquement, on représente :

- le gain en décibel $G_{\mathrm{dB}} = 20 \log |\underline{H}|$ en fonction de $\log \omega$;
- φ en fonction de $\log \omega$.

On obtient les diagrammes de Bode.

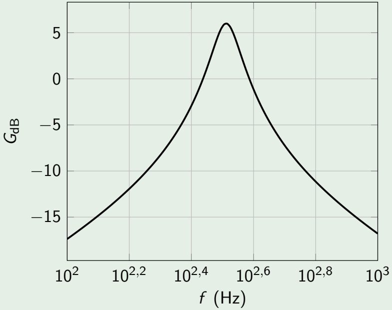
Fonction de transfert (rappels)

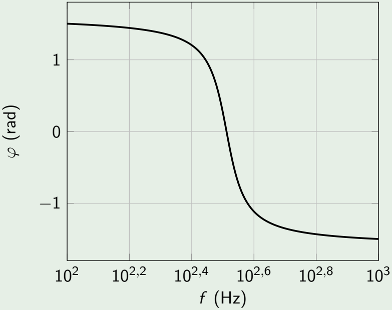
Exercice

Une fonction de transfert est de la forme :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}.$$

Déterminer H_0, ω_0 et Q à partir des diagrammes de Bode.





Transposition des régimes temporels et fréquentiels

L'équation différentielle est équivalente à la fonction de transfert :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\mathrm{d}^i s}{\mathrm{d}t^i} = \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{\mathrm{d}^k e}{\mathrm{d}t^k} \Leftrightarrow \underline{H} = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k (j\omega)^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i (j\omega)^i}.$$

Transposition des régimes temporels et fréquentiels

L'équation différentielle est équivalente à la fonction de transfert :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\mathrm{d}^i s}{\mathrm{d}t^i} = \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{\mathrm{d}^k e}{\mathrm{d}t^k} \Leftrightarrow \underline{H} = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k (j\omega)^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i (j\omega)^i}.$$

Preuve

Utiliser les formes complexes des signaux $e(t) \rightarrow \underline{e}$ et $s(t) \rightarrow \underline{s}$ et les propriétés des dérivées de ces formes complexes.

Transposition des régimes temporels et fréquentiels

Notation de Laplace

On utilise aussi la notation de Laplace $j\omega \rightarrow p$ pour exprimer la fonction de transfert en variable de Laplace p :

$$\underline{H}(p) = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k p^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i}.$$

Transposition des régimes temporels et fréquentiels

Exercice

1. Donner la fonction de transfert du système décrit par l'équation $\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + 3\omega_0 \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, s = 2\omega_0 \dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 e$.

Transposition des régimes temporels et fréquentiels

Exercice

1. Donner la fonction de transfert du système décrit par l'équation $\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + 3\omega_0 \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, s = 2\omega_0 \dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 e$.

$$\underline{H} = \frac{\omega_0^2 + 2j\omega_0\omega}{\omega_0^2 + 3j\omega_0\omega - \omega^2}.$$

Transposition des régimes temporels et fréquentiels

Exercice

1. Donner l'équation différentielle du système décrit par la fonction de transfert $\underline{H}(p) = \dfrac{\omega_0^2 + 5\omega_0 p + 2p^2}{\omega_0^2 + 3\omega_0 p + 2p^2}$.

Transposition des régimes temporels et fréquentiels

Exercice

1. Donner l'équation différentielle du système décrit par la fonction de transfert $\underline{H}(p) = \dfrac{\omega_0^2 + 5\omega_0 p + 2p^2}{\omega_0^2 + 3\omega_0 p + 2p^2}$.

$$2\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + 3\omega_0\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = 2\frac{\mathrm{d}^2 e}{\mathrm{d}t^2} + 3\omega_0\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 e.$$

Comportement en $t = 0^+$ et à $t \to +\infty$

Soit un système LCI de fonction de transfert :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k (j\omega)^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i (j\omega)^i}.$$

Soit $e(t)$ un signal d'entrée en **échelon** :

$$e(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ E, & t \geqslant 0. \end{cases}$$

Comportement en $t = 0^+$ et à $t \to +\infty$

Soit un système LCI de fonction de transfert :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k (j\omega)^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i (j\omega)^i}.$$

Théorème

Le signal de sortie $s(t)$, supposé nul pour $t < 0$, est écrit $s(t) = E\, s_{\mathrm{ind}}(t)$ où s_{ind} est appelé **réponse indicielle** du système. Alors, $s_{\mathrm{ind}}(t)$ vérifie :

$$\lim_{t \to 0^+} s_{\mathrm{ind}}(t) = \lim_{\omega \to +\infty} \underline{H}(\omega)$$

$$\lim_{t \to +\infty} s_{\mathrm{ind}}(t) = \lim_{\omega \to 0} \underline{H}(\omega)$$

Comportement en $t = 0^+$ et à $t \to +\infty$

Justification :

Comportement en $t = 0^+$ et à $t \to +\infty$

Justification :

- Pour $t \to +\infty$, le signal d'entrée est constant depuis longtemps, le système répond à un signal constant, donc de pulsation nulle.

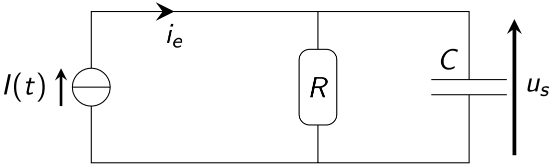
Comportement en $t = 0^+$ et à $t \to +\infty$

Justification :

- Pour $t \to +\infty$, le signal d'entrée est constant depuis longtemps, le système répond à un signal constant, donc de pulsation nulle.
- Pour $t = 0$, le signal d'entrée impose une discontinuité, que l'on peut modéliser comme un signal harmonique de pulsation infinie.

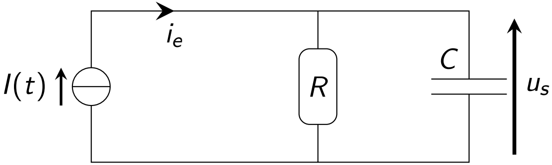
Exercice

Soit le circuit RC parallèle ci-dessous :



Exercice

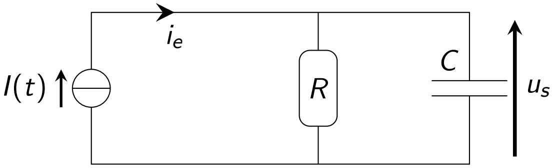
Soit le circuit RC parallèle ci-dessous :



1) Établir la relation différentielle liant u_s, tension de sortie, et i_e, courant d'entrée. En déduire la fonction de transfert (ou transrésistance) $\underline{H}_R = \dfrac{\underline{u}_s}{\underline{i}_e}$. Pourquoi ce nom de transrésistance ?

Exercice

Soit le circuit RC parallèle ci-dessous :

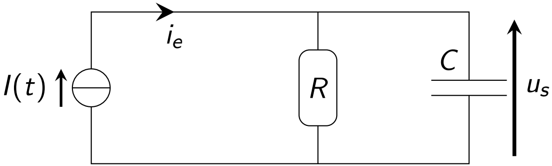


2) Quelles sont les limites suivantes :

$$\lim_{\omega\to 0} \underline{H}_R(\omega), \quad \lim_{\omega\to +\infty} \underline{H}_R(\omega).$$

Exercice

Soit le circuit RC parallèle ci-dessous :



3) Ce circuit est alimenté en échelon de courant :

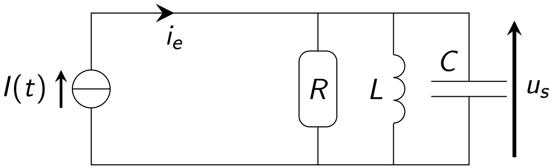
$$I(t) = \begin{cases} 0, & \forall t < 0; \\ I_0 > 0, & \forall t \geqslant 0. \end{cases}$$

À l'aide de la question 2, donner les limites suivantes :

$$\lim_{t \to 0} u_s(t), \quad \lim_{t \to +\infty} u_s(t).$$

Exercice

4) Reprendre les questions précédentes avec le circuit suivant :



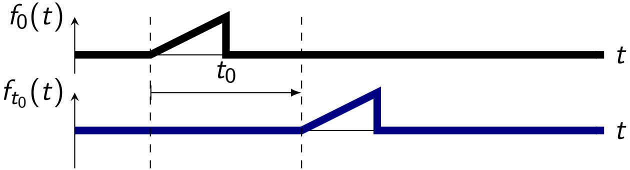
Solution

Translation d'une fonction

Soit $f_0(t)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
La fonction f_{t_0} translatée de la valeur t_0 de f_0 est :

$$f_{t_0}(t) = f_0(t - t_0).$$

On le vérifie aisément sur un exemple numérique.
Si $f_1(t) = f_0(t-1)$, alors, $f_1(3) = f_0(2)$.



Circuit RC commandé en échelon sinusoïdal

La solution particulière de l'équation $\tau\dfrac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} + u_s = E\sin(\omega t)$ s'établit facilement grâce à la notation complexe. On pose $\underline{u}_p = \underline{U}\exp j\omega t$ avec $E\sin(\omega t) = \Im(E\exp j\omega t)$.

$$j\omega\tau\underline{U} + \underline{U} = E$$
$$\underline{U} = \frac{E}{1+j\omega\tau}.$$

On extrait la partie imaginaire de $\underline{u}_p = \dfrac{E}{1+j\omega\tau}\exp j\omega t$:

$$\underline{u}_p = \frac{E}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}\exp j(\omega t - \arctan(\omega\tau))$$
$$u_p(t) = \frac{E}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}\sin(\omega t - \arctan(\omega\tau)).$$

Circuit RC commandé en échelon sinusoïdal

La solution générale s'écrit donc :

$$u_s(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{E}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}\sin(\omega t - \arctan(\omega\tau)).$$

La constante A est déterminée avec la condition initiale $u_s(0) = 0$ d'où :

$$u_s(t) = \frac{E}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}\left[\sin(\arctan(\omega\tau))\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right.$$
$$\left.+\sin(\omega t - \arctan(\omega\tau))\right].$$

Retour

Solutions entrées-sorties

Qualificatifs des systèmes :

1. Système linéaire, continu mais **non invariant**.
2. Système continu, invariant mais **non linéaire**.

Solutions des équations homogènes, par séparation des variables :

1. $$\frac{\mathrm{d}s}{s} = -\frac{\sin(\Omega t)}{\tau}\mathrm{d}t \Rightarrow s = A\exp\left(\frac{\cos(\Omega t)}{\Omega\tau}\right).$$
2. $$-\frac{\mathrm{d}s}{s^2} = \frac{a}{\tau}\mathrm{d}t \Rightarrow s = \frac{1}{A + \frac{at}{\tau}}.$$

Retour

Circuit RC et RLC parallèles

1) Loi des nœuds $i_e = \dfrac{u_s}{R} + C\dfrac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t}$ ou $\tau\dfrac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} + u_s = Ri_e$ où $\tau = RC$.

On en déduit $\underline{H}_R = \dfrac{R}{1 + j\omega\tau}$, homogène à une résistance, et caractérisant la relation entrée-sortie.

Circuit RC et RLC parallèles

2) Les limites demandées sont :

$$\lim_{\omega \to 0} \underline{H} = R$$
$$\lim_{\omega \to +\infty} \underline{H} = 0.$$

3) On en déduit :

$$\lim_{t \to +\infty} u_s(t) = RI_0$$
$$\lim_{t \to 0^+} u_s(t) = 0.$$

Circuit RC et RLC parallèles

4) La fonction de transfert s'établit à partir de l'équation différentielle :

$$u_s + \frac{R}{L}\int u_s \,\mathrm{d}t + RC\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} = Ri_e$$

soit, en dérivant l'équation différentielle :

$$\underline{H}_R = R\frac{j\omega}{j\omega + \dfrac{R}{L} - RC\omega^2} = R\frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

où l'on a posé $\tau = \dfrac{L}{R}$ et $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$.

Circuit RC et RLC parallèles

On en déduit :

$$\lim_{\omega \to 0} \underline{H} = 0 \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} u_s(t) = 0$$
$$\lim_{\omega \to +\infty} \underline{H} = 0 \Rightarrow \lim_{t \to 0^+} u_s(t) = 0.$$

Retour