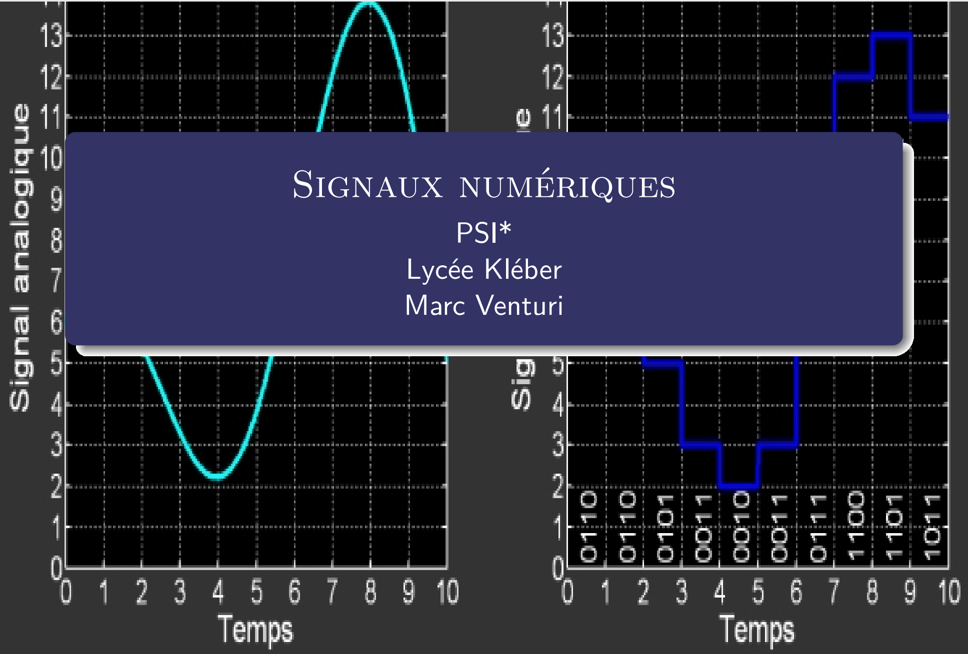


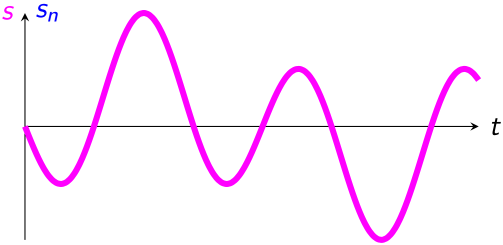
Signaux numériques

PSI*
Lycée Kléber
Marc Venturi

Sommaire

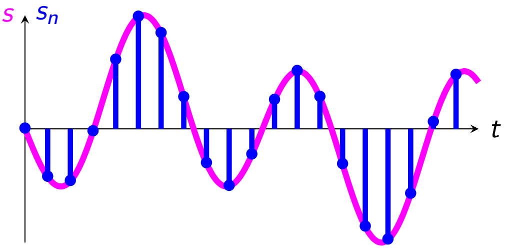
Principes

Un signal analogique $s(t)$, formé d'une **infinité continue** de valeurs, définies sur un intervalle temporel fini, est transformé en une **suite finie** s_n de valeurs prélevées périodiquement.



Principes

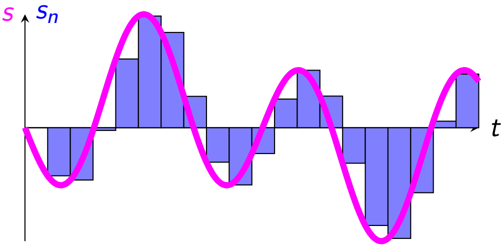
Un signal analogique $s(t)$, formé d'une **infinité continue** de valeurs, définies sur un intervalle temporel fini, est transformé en une **suite finie** s_n de valeurs prélevées périodiquement.



$$s_n = s(nT_e),\ n \in \mathbb{N}.$$

Principes

Un signal analogique $s(t)$, formé d'une **infinité continue** de valeurs, définies sur un intervalle temporel fini, est transformé en une **suite finie** s_n de valeurs prélevées périodiquement.



$$s_n = s(nT_e),\ n \in \mathbb{N}.$$

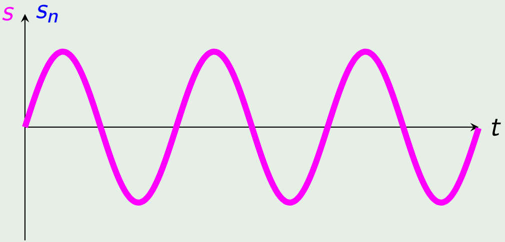
Principes

La grandeur fondamentale de l'échantillonnage est la **période d'échantillonnage** T_e ou la **fréquence d'échantillonnage** $F_e = \dfrac{1}{T_e}$.

Condition de Nyquist-Shannon (qualitative)

L'échantillonnage doit respecter le signal initial. Il doit fournir un reflet fidèle de ce signal.

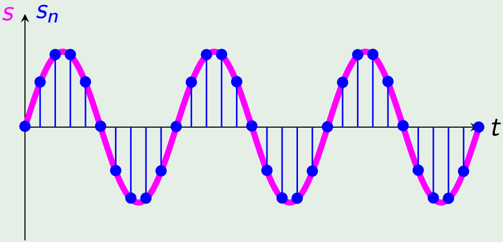
Signal harmonique échantillonné



Condition de Nyquist-Shannon (qualitative)

L'échantillonnage doit respecter le signal initial. Il doit fournir un reflet fidèle de ce signal.

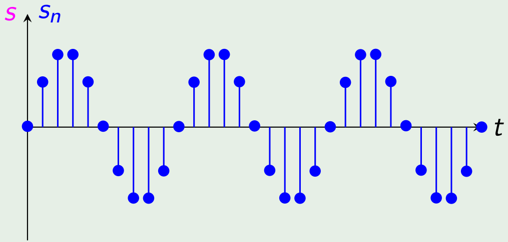
Signal harmonique échantillonné



Condition de Nyquist-Shannon (qualitative)

L'échantillonnage doit respecter le signal initial. Il doit fournir un reflet fidèle de ce signal.

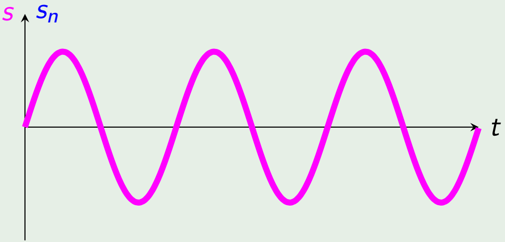
Signal harmonique échantillonné



Condition de Nyquist-Shannon (qualitative)

L'échantillonnage doit respecter le signal initial. Il doit fournir un reflet fidèle de ce signal.

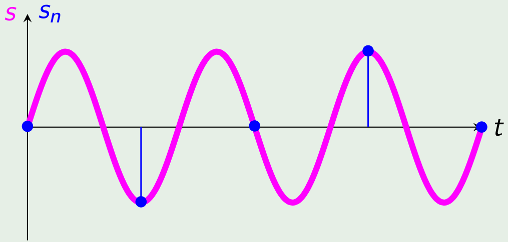
Signal harmonique échantillonné



Condition de Nyquist-Shannon (qualitative)

L'échantillonnage doit respecter le signal initial. Il doit fournir un reflet fidèle de ce signal.

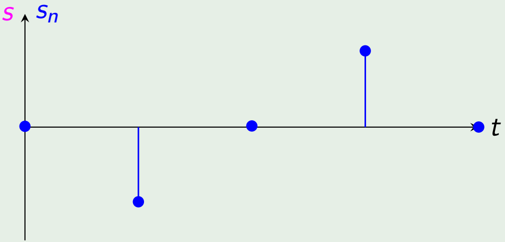
Signal harmonique échantillonné



Condition de Nyquist-Shannon (qualitative)

L'échantillonnage doit respecter le signal initial. Il doit fournir un reflet fidèle de ce signal.

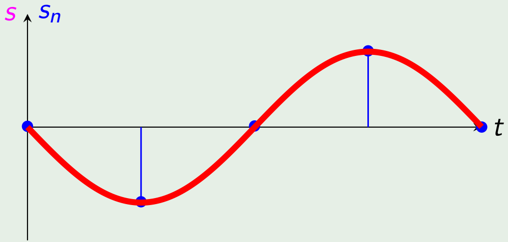
Signal harmonique échantillonné



Condition de Nyquist-Shannon (qualitative)

L'échantillonnage doit respecter le signal initial. Il doit fournir un reflet fidèle de ce signal.

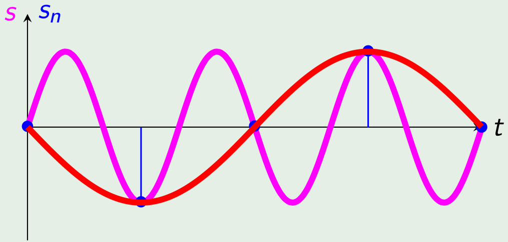
Signal harmonique échantillonné



Condition de Nyquist-Shannon (qualitative)

L'échantillonnage doit respecter le signal initial. Il doit fournir un reflet fidèle de ce signal.

Signal harmonique échantillonné



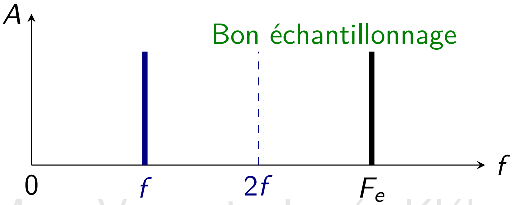
Condition de Nyquist-Shannon (qualitative)

Règle de Nyquist-Shannon

Un signal harmonique doit être échantillonné de telle sorte qu'il existe **au moins deux échantillons par période**.

Si f est la période du signal harmonique et T sa période, alors :

$$2T_e \leqslant T \Leftrightarrow 2f \leqslant F_e.$$



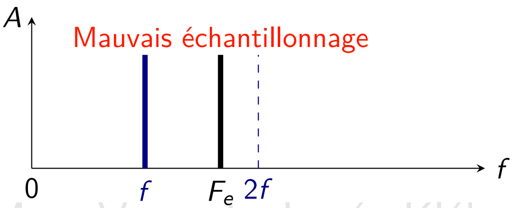
Condition de Nyquist-Shannon (qualitative)

Règle de Nyquist-Shannon

Un signal harmonique doit être échantillonné de telle sorte qu'il existe **au moins deux échantillons par période**.

Si f est la période du signal harmonique et T sa période, alors :

$$2T_e \leqslant T \Leftrightarrow 2f \leqslant F_e.$$

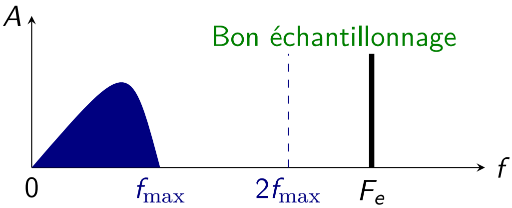


Condition de Nyquist-Shannon (qualitative)

Règle de Nyquist-Shannon

Un signal quelconque doit être échantillonné de telle sorte que la **fréquence maximale** $f_{\max}$ **de son spectre** soit échantillonnée au moins deux fois par période.

$$\boxed{2f_{\max} \leqslant F_e.}$$

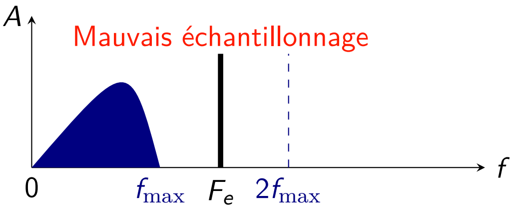


Condition de Nyquist-Shannon (qualitative)

Règle de Nyquist-Shannon

Un signal quelconque doit être échantillonné de telle sorte que la **fréquence maximale $f_{\max}$ de son spectre** soit échantillonnée au moins deux fois par période.

$$\boxed{2f_{\max} \leqslant F_e.}$$

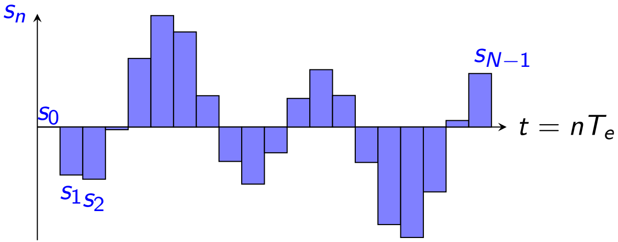


Sommaire

Analyse mathématique

Soit un ensemble de N valeurs d'un signal numérique :

$$\{s_0, s_1, \ldots, s_{N-1}\} = \{s_n\}, \;\; n \in [\![0, N-1]\!].$$



On aimerait écrire les N valeurs s_n sous forme d'une somme de signaux numériques harmoniques.

Analyse mathématique

$$s_n = \sum_m a_m \cos(\omega_m n T_e) + b_m \sin(\omega_m n T_e) \ ?$$

Analyse mathématique

Sous forme complexe, on a :

Théorème

$$\forall n \in [\![0, N-1]\!],$$

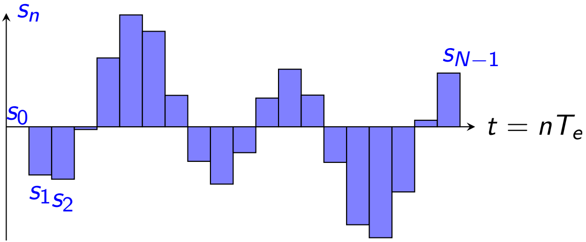
$$s_n = \sum_{m=0}^{N-1} A_m \exp j\left(\frac{2\pi F_e m}{N} n T_e\right) = \sum_{m=0}^{N-1} A_m \exp j\left(\frac{2\pi mn}{N}\right),$$

où

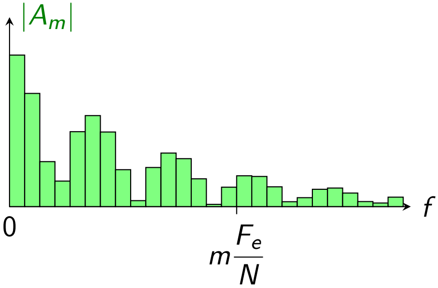
$$A_m = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} s_n \exp j\left(-\frac{2\pi km}{N}\right).$$

▸ Démonstration

Analyse mathématique



Analyse mathématique



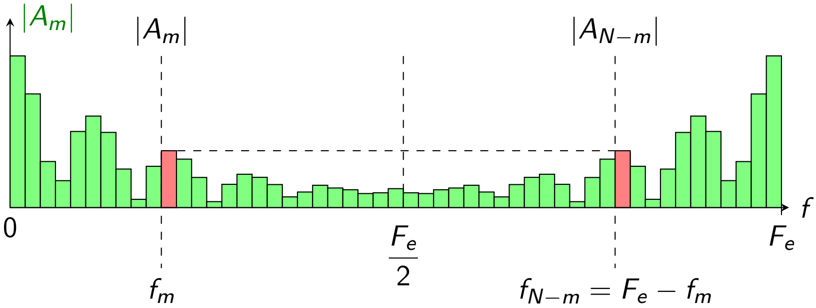
$|A_m|$ est l'amplitude du signal sinusoïdal numérique de fréquence $f_m = m\dfrac{F_e}{N}$.

Propriétés du spectre d'un signal numérique

Les $A_m = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} s_n \exp j\left(\dfrac{2\pi nm}{N}\right) \in \mathbb{C}$ où les $s_n \in \mathbb{R}$ ont les propriétés importantes suivantes :

- périodicité $A_{m+N} = A_m$;
- symétrie des modules $|A_{N-m}| = |A_m|$.

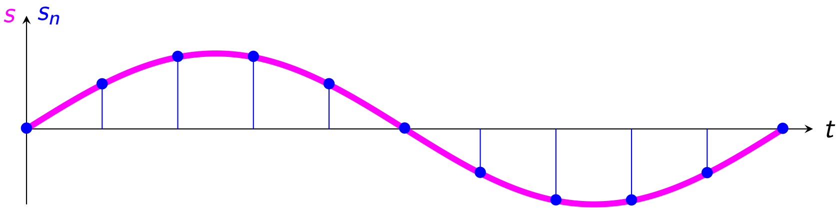
Propriétés du spectre d'un signal numérique

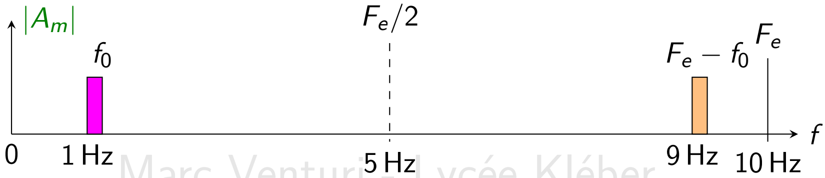


Repliement du spectre

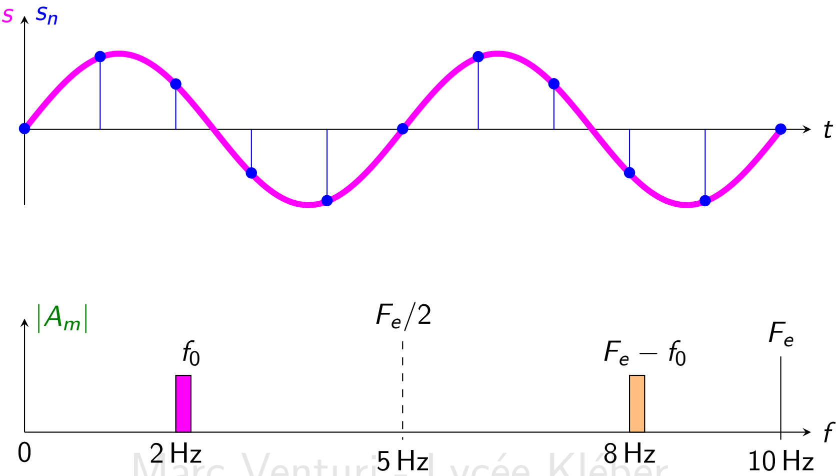
Cette propriété de symétrie par rapport à la fréquence $\frac{F_e}{2}$ est responsable du phénomène de **repliement du spectre**.

Repliement du spectre

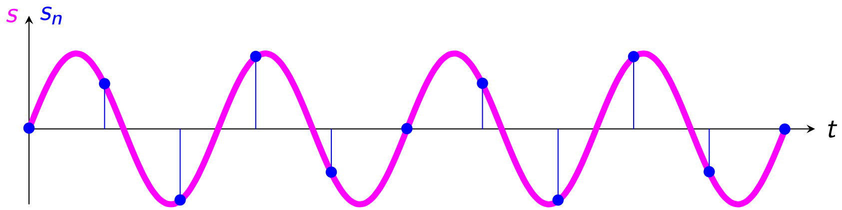


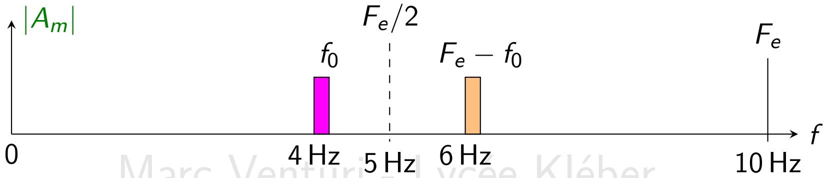


Repliement du spectre

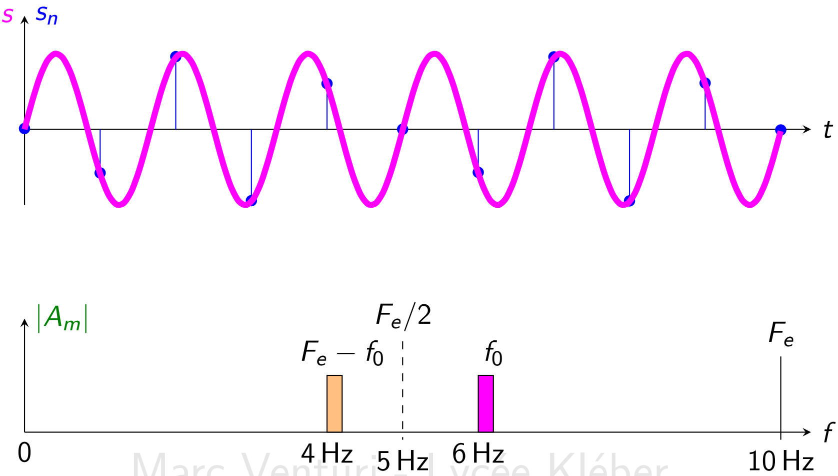


Repliement du spectre

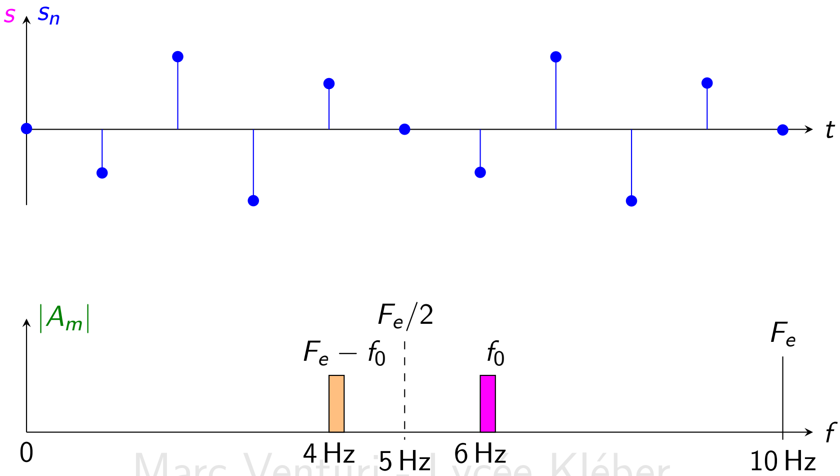




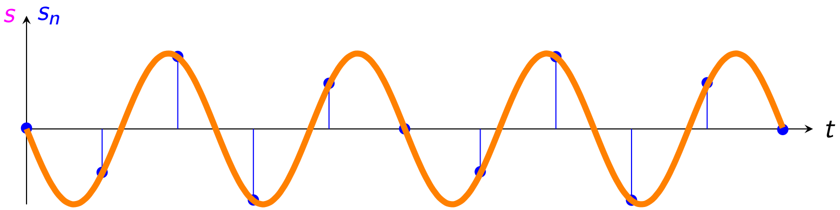
Repliement du spectre

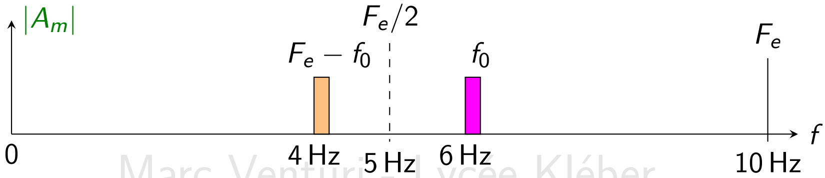


Repliement du spectre



Repliement du spectre





Repliement du spectre

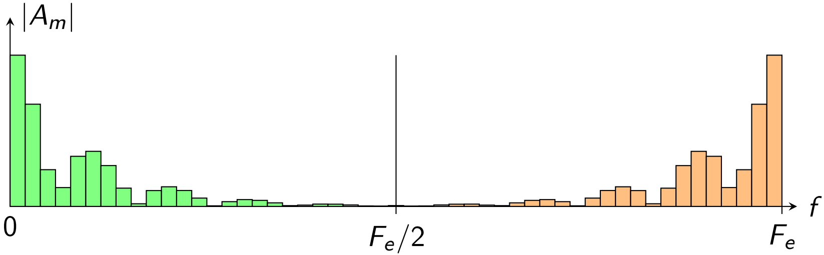
Condition de Nyquist-Shannon

Pour éviter l'apparition de signaux inexistants initialement, dus au repliement du spectre, il faut que la fréquence maximale $f_{\max}$ du spectre d'un signal respecte **la condition de Nyquist-Shannon** :

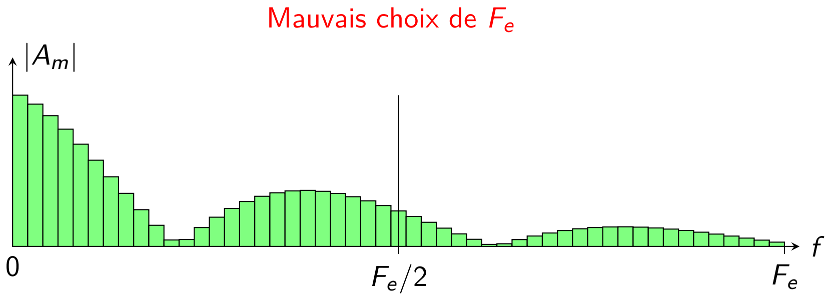
$$\boxed{f_{\max} \leqslant \frac{F_e}{2}}.$$

Repliement du spectre

Bon choix de F_e

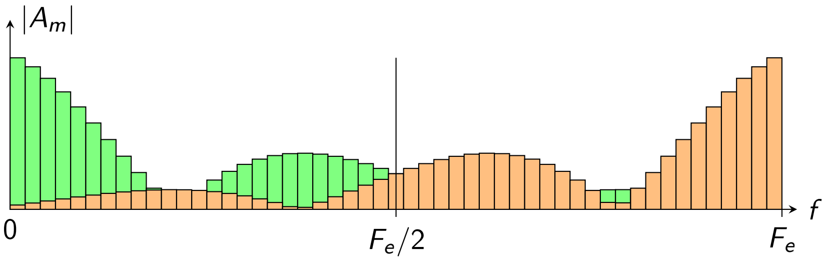


Repliement du spectre

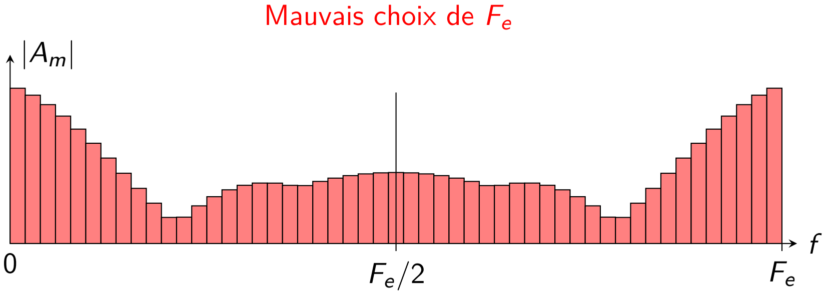


Repliement du spectre

Mauvais choix de F_e



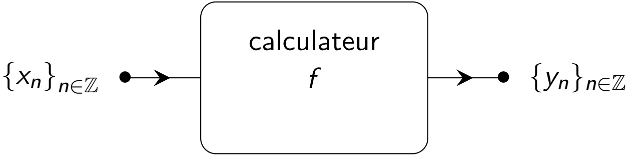
Repliement du spectre



Sommaire

Description

Un filtre numérique est un système électronique (calculateur) qui à un signal d'entrée échantillonné $\{x_n\},\ n \in \mathbb{Z}$ associe un signal de sortie $\{y_n\},\ n \in \mathbb{Z}$.



Mathématiquement, le calculateur transforme la suite $\{x_n\}$ en la suite $\{y_n\}$:

$$f : \{x_n\} \mapsto \{y_n\}.$$

Description

Intérêts du filtrage numérique :

- La transformation f est très générale, seulement soumise au principe de causalité ;

Description

Intérêts du filtrage numérique :

- La transformation f est très générale, seulement soumise au principe de causalité ;
- On peut **choisir** à son gré et **programmer** la transformation ;

Description

Intérêts du filtrage numérique :

- La transformation f est très générale, seulement soumise au principe de causalité ;
- On peut **choisir** à son gré et **programmer** la transformation ;
- On peut créer des filtres impossibles à construire avec des systèmes analogiques.

Description

Contrainte de causalité

La suite $\{x_n\}$ est issue d'un échantillonnage temporel :

$$x_n = x(nT_e),\ \ n \in \mathbb{Z}.$$

De même, le signal y_n est évalué à l'instant $t = nT_e$: $y_n = y(nT_e)$.

La valeur y_n ne peut ainsi dépendre que :

- des valeurs présente et antérieures x_p, $p \leqslant n$;
- des valeurs antérieures y_p, $p < n$.

$$\boxed{y_n = f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, ..., y_{n-1}, y_{n-2}, ...)}.$$

Description

Filtres numériques linéaires

La transformation f est linéaire, y_n est une combinaison linéaire des variables :

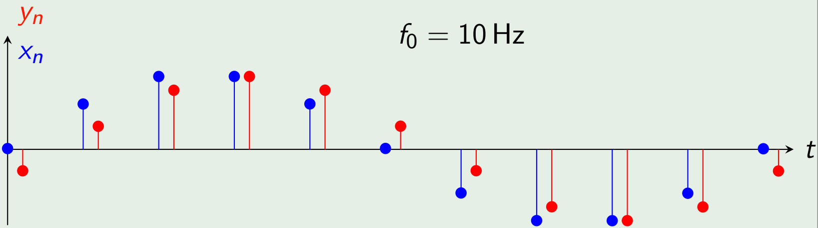
$$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \ldots + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2} + \ldots$$
$$y_n = \sum_{i=0}^{N} a_i x_{n-i} + \sum_{j=1}^{M} b_j y_{n-j}.$$

Lorsque la transformation est de plus **invariante**, les coefficients a_i et b_j sont **indépendants du temps**.

Applications

Moyenneur

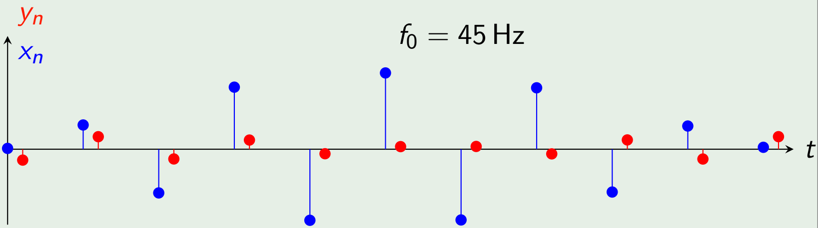
$$y_n = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}.$$



Applications

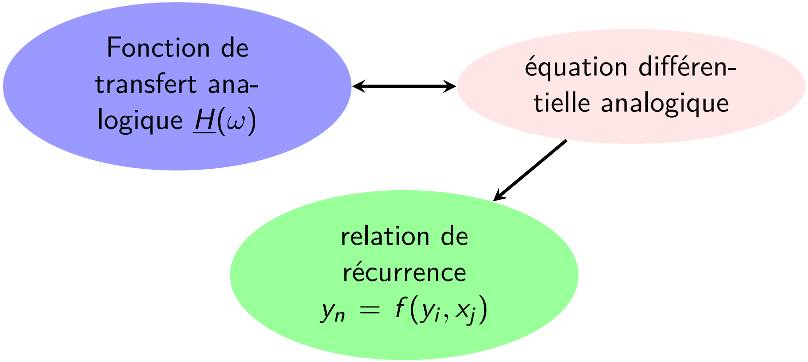
Moyenneur

$$y_n = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}.$$



Complément

De l'analogique vers le numérique



De l'analogique vers le numérique

Règles : les dérivées temporelles sont remplacées par le taux d'accroissement. Ainsi :

Analogique	Numérique
y	y_n
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$	$\dfrac{y_n - y_{n-1}}{T_e}$
$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$	$\left(\dfrac{y_n - y_{n-1}}{T_e} - \dfrac{y_{n-1} - y_{n-2}}{T_e}\right)\dfrac{1}{T_e} = \dfrac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{T_e^2}$

De l'analogique vers le numérique

Passe-bas du premier ordre

Soit $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$. Il lui correspond l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega_c y = \omega_c x.$$

Alors $\dfrac{y_n - y_{n-1}}{T_e} + \omega_c y_n = \omega_c x_n$ d'où :

$$\boxed{y_n = \frac{1}{1 + T_e\omega_c} y_{n-1} + \frac{T_e\omega_c}{1 + T_e\omega_c} x_n.}$$

De l'analogique vers le numérique

Passe-bas du deuxième ordre

Soit la fonction de transfert du deuxième ordre

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_c} - \dfrac{\omega^2}{\omega_c^2}}.$$

Quelle est la relation de récurrence numérique équivalente à cette fonction de transfert ?

▸ Réponse

De l'analogique vers le numérique

Intégrateur et dérivateur

Quelle est la relation de récurrence numérique équivalente à un intégrateur ?

Réponse

Quelle est la relation de récurrence numérique équivalente à un dérivateur ?

Réponse

Sommaire

Codage binaire

Une valeur échantillonnée x_n est une valeur réelle (tension, intensité d'un courant).

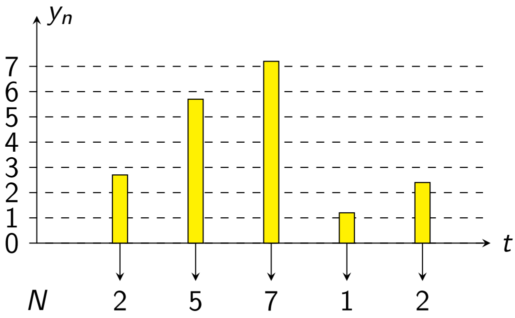
Pour être traitée par un circuit numérique fonctionnant en binaire (deux valeurs sont utilisées, notées 0 et 1), il faut convertir le réel x_n en une suite finie de 0 et de 1.

Pour cela, il y a deux opérations à effectuer :

- numériser la valeur y_n en un entier N ;
- convertir l'entier N en notation binaire.

Codage binaire

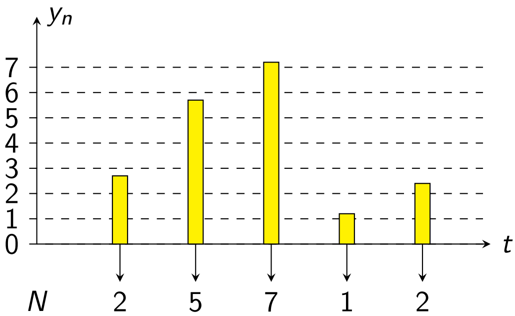
Numérisation



Dans l'exemple donné, on numérise les valeurs de y_n sur huit valeurs (le but étant d'utiliser ici trois bits pour stocker chaque valeur entière).

Codage binaire

Numérisation



L'augmentation du nombre de valeurs améliore la précision mais demande plus de mémoire pour le stockage et plus de temps pour le traitement.

Codage binaire

Notation binaire

N

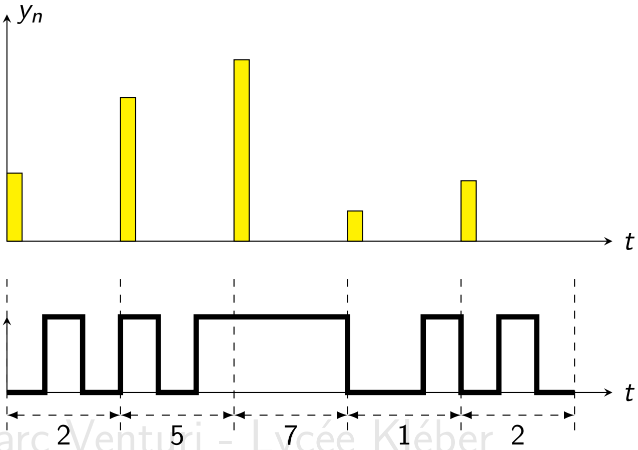
$2 \longrightarrow 010$

$5 \longrightarrow 101$

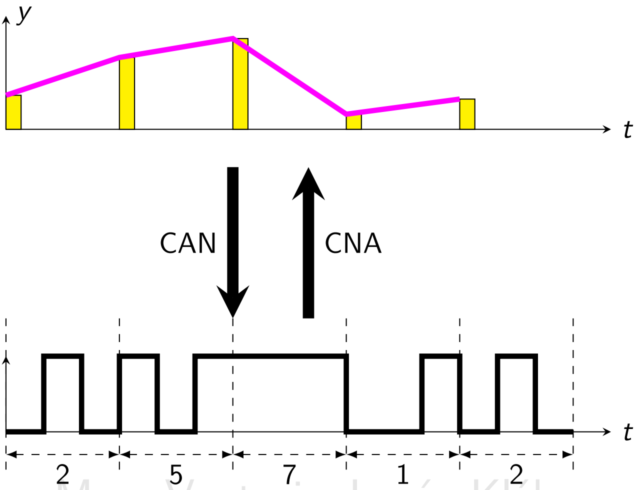
$7 \longrightarrow 111$

$1 \longrightarrow 001$

$2 \longrightarrow 010$



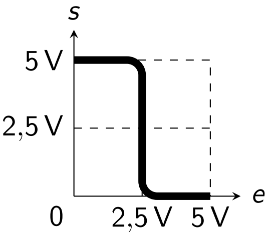
Codage binaire



Sommaire

Exemples de portes logiques

Porte NON



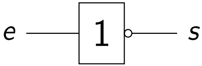


Table de vérité :

Entrée	Sortie
e	s
0	1
1	0

Exemples de portes logiques

Porte OU

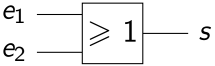


Table de vérité :

Entrées		Sortie
e_1	e_2	s
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Exemples de portes logiques

Porte ET

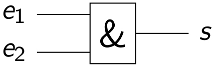
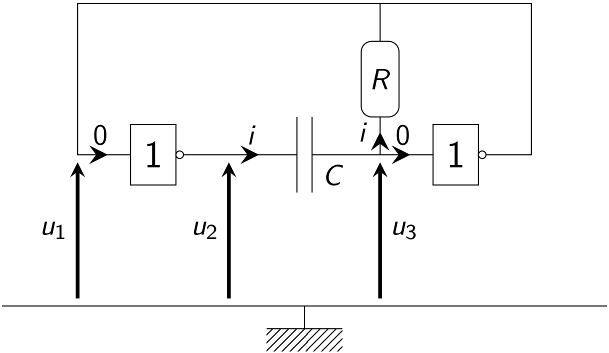


Table de vérité :

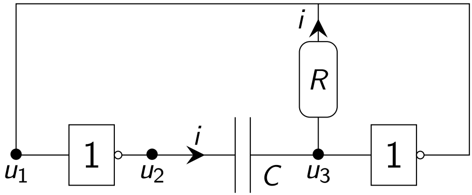
Entrées		Sortie
e_1	e_2	s
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Oscillateur numérique

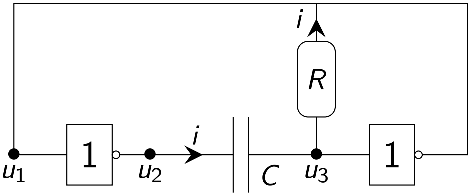
But : générer un signal d'horloge, signal créneaux positif, dont la période est la plus précise et stable possible.



Oscillateur numérique



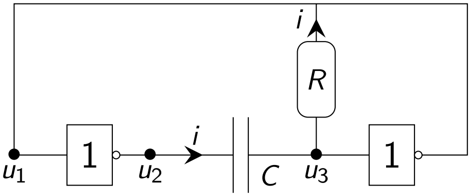
Oscillateur numérique



- Les portes logiques NON imposent :

$$\left\{\begin{array}{l} u_3 > 2{,}5\,\mathrm{V} \Rightarrow u_1 = 0 \\ u_3 < 2{,}5\,\mathrm{V} \Rightarrow u_1 = 5\,\mathrm{V} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} u_1 = 5\,\mathrm{V} \Rightarrow u_2 = 0 \\ u_1 = 0 \Rightarrow u_2 = 5\,\mathrm{V} \end{array}\right.$$

Oscillateur numérique

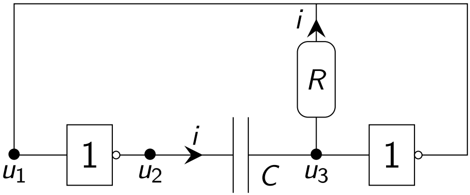


- Les portes logiques NON imposent :

$$\left\{\begin{array}{l} u_3 > 2{,}5\,\mathrm{V} \Rightarrow u_1 = 0 \\ u_3 < 2{,}5\,\mathrm{V} \Rightarrow u_1 = 5\,\mathrm{V} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} u_1 = 5\,\mathrm{V} \Rightarrow u_2 = 0 \\ u_1 = 0 \Rightarrow u_2 = 5\,\mathrm{V} \end{array}\right.$$

- Le condensateur impose la continuité de la tension $u_C = u_2 - u_3$.

Oscillateur numérique



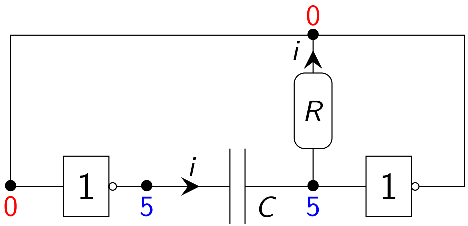
- Les portes logiques NON imposent :

$$\begin{cases} u_3 > 2{,}5\,\mathrm{V} \Rightarrow u_1 = 0 \\ u_3 < 2{,}5\,\mathrm{V} \Rightarrow u_1 = 5\,\mathrm{V} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_1 = 5\,\mathrm{V} \Rightarrow u_2 = 0 \\ u_1 = 0 \Rightarrow u_2 = 5\,\mathrm{V} \end{cases}$$

- Le condensateur impose la continuité de la tension $u_C = u_2 - u_3$.
- Le circuit RC série est décrit par l'équation

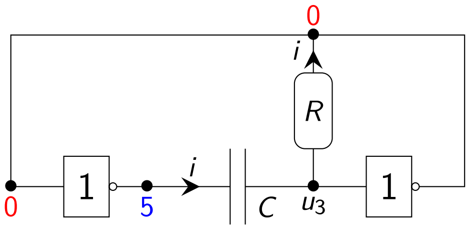
$$RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + u_c = u_2 - u_1.$$

Oscillateur numérique



Hypothèses de départ à $t = 0$: $u_c = 0$, $u_2 = 5\,\text{V}$, $u_3 = 5\,\text{V}$, $u_1 = 0$ d'où $u_2 - u_1 = 5\,\text{V} = V_0$.

Oscillateur numérique

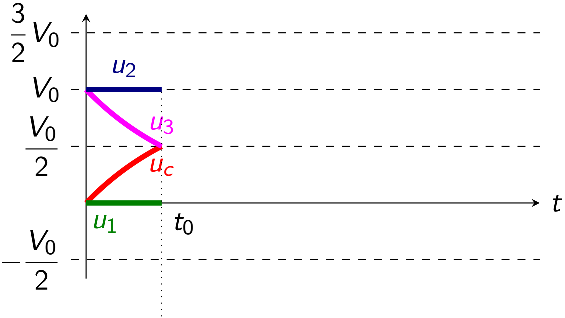


Hypothèses de départ à $t = 0$: $u_c = 0$, $u_2 = 5\,\mathrm{V}$, $u_3 = 5\,\mathrm{V}$, $u_1 = 0$ d'où $u_2 - u_1 = 5\,\mathrm{V} = V_0$.

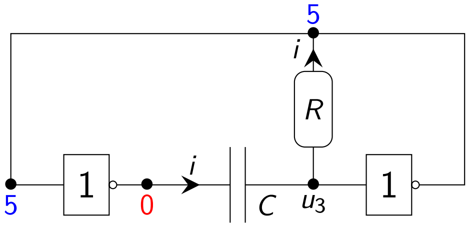
Alors $u_c(t) = V_0\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$ et $u_3 = \tau\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = V_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$.

Oscillateur numérique

$$u_c(t) = V_0\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \text{ et } u_3 = \tau\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = V_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$



Oscillateur numérique



À t_0, il y a basculement des portes logiques.

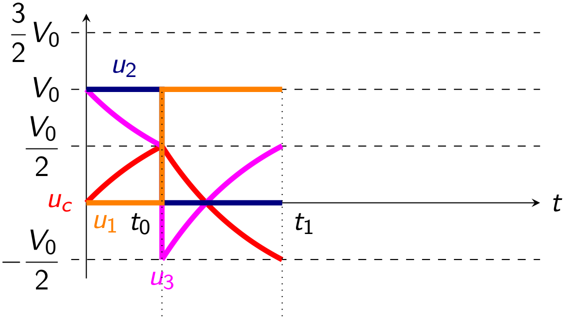
$$u_1 \to 5,\, u_2 \to 0 \Rightarrow u_2 - u_1 = -5\,\mathrm{V}.$$

On en déduit, avec $u_3 = 0 - u_c$:

$$u_c = -V_0 + \frac{3}{2} V_0 \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau}\right), \quad u_3 = V_0 - \frac{3}{2} V_0 \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau}\right).$$

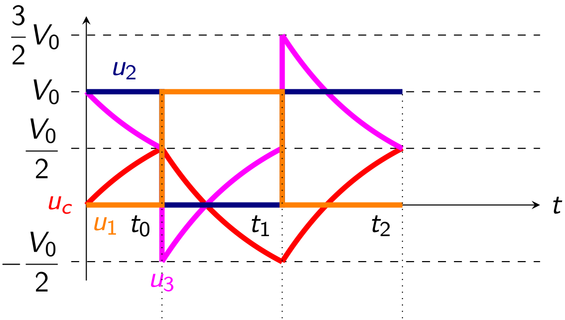
Oscillateur numérique

$$u_c = -V_0 + \frac{3}{2} V_0 \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau}\right), \quad u_3 = V_0 - \frac{3}{2} V_0 \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau}\right).$$



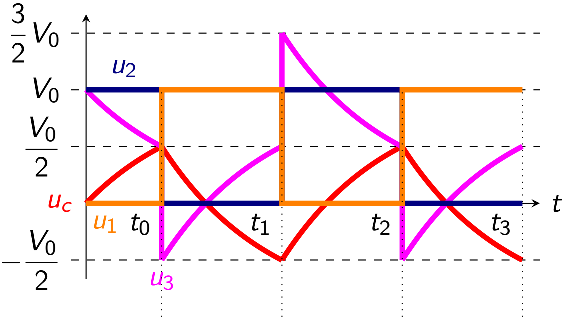
Oscillateur numérique

$$u_c = V_0 - \frac{3}{2} V_0 \exp\left(-\frac{t - t_1}{\tau}\right), \quad u_3 = \frac{3}{2} V_0 \exp\left(-\frac{t - t_1}{\tau}\right).$$



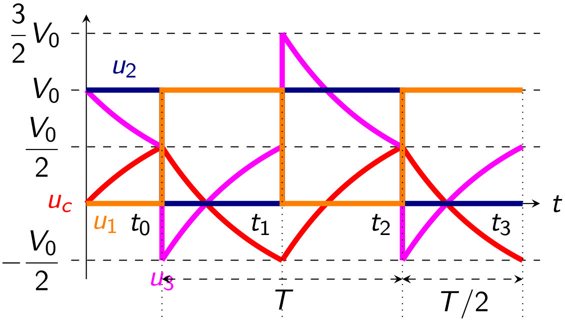
Oscillateur numérique

$$u_c = -V_0 + \frac{3}{2} V_0 \exp\left(-\frac{t-t_2}{\tau}\right), \quad u_3 = V_0 - \frac{3}{2} V_0 \exp\left(-\frac{t-t_2}{\tau}\right).$$



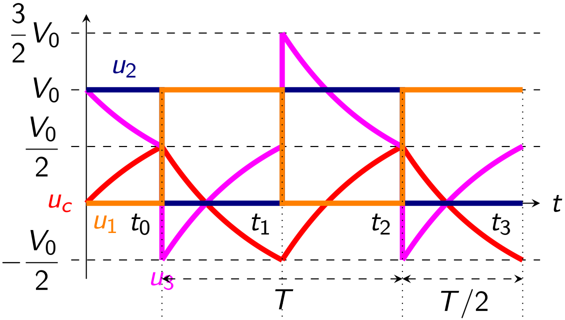
Oscillateur numérique

$$u_c = -V_0 + \frac{3}{2} V_0 \exp\left(-\frac{t-t_2}{\tau}\right), \quad u_3 = V_0 - \frac{3}{2} V_0 \exp\left(-\frac{t-t_2}{\tau}\right).$$



Oscillateur numérique

$$-\frac{V_0}{2} = -V_0 + \frac{3}{2} V_0 \exp\left(-\frac{T}{2\tau}\right) \Rightarrow \boxed{T = 2\tau \ln 3}.$$



Sommaire

Spectre d'un signal numérique

On pose $A_m = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} s_k \exp j\left(-\dfrac{2\pi km}{N}\right)$. Pour $n \in [\![0, N-1]\!]$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{N-1} A_m \exp j\left(\frac{2\pi nm}{N}\right)\\
&= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\left[\sum_{n=0}^{N-1} s_k \exp j\left(-\frac{2\pi km}{N}\right)\right]\exp j\left(\frac{2\pi nm}{N}\right)\\
&= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} s_n \exp j\left(\frac{2\pi(n-k)m}{N}\right)\\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} s_k \underbrace{\left[\sum_{m=0}^{N-1}\exp j\left(\frac{2\pi(n-k)m}{N}\right)\right]}_{g(n-k)}
\end{aligned}$$

Spectre d'un signal numérique

Propriétés : $\begin{cases} g(0) = N \\ g(p) = 0 \ \forall p \in \mathbb{Z}^* \end{cases}$

La première propriété est évidente, la seconde se démontre en remarquant que $g(p \neq 0)$ est une somme d'une suite géométrique :

$$g(p) = \sum_{m=0}^{N-1} \left(\exp j \left(\frac{2\pi p}{N} \right) \right)^m = \frac{1 - \exp(j2\pi p)}{1 - \exp j \dfrac{2\pi p}{N}} = 0.$$

On en déduit :

$$\sum_{m=0}^{N-1} A_m \exp j \left(\frac{2\pi nm}{N} \right) = s_n$$

Retour

Fonction de transfert

On peut définir et calculer une fonction de transfert pour un filtre numérique.
On pose $x_n = \underline{X} \exp j(\omega n T_e)$ et $y_n = \underline{Y} \exp j(\omega n T_e)$ puis, par définition, $\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{Y}}{\underline{X}}}$. Alors, pour le moyenneur à deux valeurs :

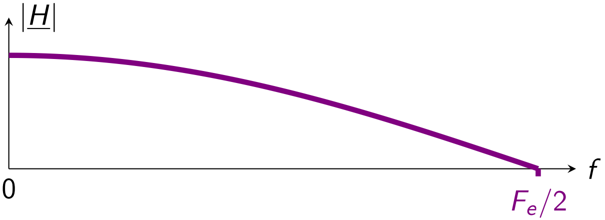
$$y_n = \frac{x_n + x_{n-1}}{2} \Rightarrow \underline{Y} = \frac{1 + \exp\left(-j\omega T_e\right)}{2}\underline{X}$$

$$\underline{H} = \frac{1 + \exp\left[-j\omega T_e\right]}{2} = \exp\left(-j\frac{\omega T_e}{2}\right)\cos\frac{\omega T_e}{2}$$

$$= \exp\left[-j\pi f T_e\right]\cos(\pi f T_e).$$

Fonction de transfert

Ainsi : $|\underline{H}| = \left|\cos\left(\pi \frac{f}{F_e}\right)\right|$.



Le moyenneur est un filtre passe-bas.

Retour

Passe-bas du deuxième ordre

L'équation différentielle équivalente à la fonction de transfert est

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_c}{Q}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega_c^2 y = x.$$

On remplace les dérivées par les taux de variation et en posant $\alpha = T_e\omega_c$:

$$\frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{T_e^2} + \frac{\omega_c}{Q}\frac{y_n - y_{n-1}}{T_e} + \omega_c^2 y_n = \omega_c^2 x_n$$

$$y_n\left(1 + \frac{\alpha}{Q} + \alpha^2\right) - \left(2 + \frac{\alpha}{Q}\right)y_{n-1} + y_{n-2} = \alpha^2 x_n$$

Passe-bas du deuxième ordre

On aboutit donc à :

$$\boxed{y_n = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{Q} + \alpha^2} \left[\alpha^2 x_n + \left(2 + \frac{\alpha}{Q}\right) y_{n-1} - y_{n-2}\right].}$$

Retour

Intégrateur numérique

La relation différentielle d'un intégrateur est :

$$y = \frac{1}{\tau}\int x \,\mathrm{d}t \Leftrightarrow \tau\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x.$$

On en déduit :

$$\tau\frac{y_n - y_{n-1}}{T_e} = x_n,$$

soit :

$$\boxed{y_n = y_{n-1} + \frac{T_e}{\tau}x_n}.$$

Dérivateur numérique

La relation différentielle d'un dérivateur est :

$$y = \tau \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

On en déduit :

$$\boxed{y_n = \frac{\tau}{T_e}\left(x_n - x_{n-1}\right)}.$$

Retour